

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE **L. FEJÉR** **A. E. INGHAM**

H. KNESER **W. MAGNUS** **O. PERRON** **W. SÜSS**

64. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 27. APRIL 1956)



BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1956

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweide 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

64. Band

Inhalt

4. (Schluß-)Heft

	Seite
Gaier, D., Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete	385
Carlitz, L., Arithmetic properties of elliptic functions	425
Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. V	435
Herrmann, O., Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen	457

Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete*)

Von

DIETER GAIER

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	385
Teil I. Vorbereitungen	
§ 1. Definitionen und Bezeichnungen	387
§ 2. Funktionentheoretische Hilfssätze	388
§ 3. Topologische Hilfssätze	391
Teil II. Verhalten der Funktionen, die $ z < 1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden	
§ 4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz	394
§ 5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes	397
§ 6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt	401
§ 7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete	403
§ 8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$	405
§ 9. Benützung anderer Normen	409
Teil III. Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $ w < 1$ abbilden	
§ 10. Arten von stetiger Konvergenz	412
§ 11. Ein Satz für stetige Konvergenz	413
§ 12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne	417
§ 13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$	418
§ 14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$	421
Literaturverzeichnis	423

Einleitung

Die Fragestellung, die dieser Arbeit zugrunde liegt, läßt sich einordnen in die allgemeine Theorie der Gebietsfunktionen. Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_0$ in der z -Ebene. Diesem Gebiet lassen sich auf verschiedene Weise Funktionen $F(z; \mathfrak{G}_0)$ (z. B. nach Festlegung eines Aufpunkts die GREENSche Funktion von $\mathfrak{G}_0$) oder Funktionale $F(\mathfrak{G}_0)$ (z. B. der siebte Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung für die normierte Abbildungsfunktion $g(w)$ von $\mathfrak{G}_0$ auf $|w| < 1$) zuordnen. Es ist nun eine wichtige Aufgabe, mit der sich die Theorie der Gebietsfunktionen befaßt, die Abhängigkeit einer solchen Funktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ bzw. eines solchen Funktionals $F(\mathfrak{G}_0)$ bei einer Veränderung des Gebiets $\mathfrak{G}_0$ festzustellen. Besonders

*) Diese Arbeit ist im Juli 1955 von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart als Habilitationsschrift angenommen worden. Die Untersuchungen wurden zum überwiegenden Teil zu der Zeit durchgeführt, als der Verfasser mit Unterstützung der Office of Naval Research of the United States Government der Harvard-Universität (Cambridge/USA.) angehörte. Für zahlreiche Hinweise und Anregungen ist der Verfasser Herrn Professor WALSH, für verschiedene Ratschläge während der Durchführung der Arbeit Herrn Professor LÖSCH zu großem Dank verpflichtet.

wird dabei interessieren, ob bei einer stetigen Veränderung von $\mathfrak{G}_0$ (in einem gewissen Sinne) sich auch die Gebietsfunktion bzw. das Funktional stetig ändert (in einem gewissen Sinne).

In unserem Fall handelt es sich um zweierlei verwandte Gebietsfunktionen.

Erstens sei $F(z; \mathfrak{G}_0) = f_0(z)$ die Funktion, die $|z| < 1$ konform und normiert auf das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ abbildet, das wir uns zu diesem Zweck in eine w -Ebene gelegt denken und das $w = 0$ im Innern enthalte; normiert heißt dabei $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$. Unsere Frage ist nun also die, ob sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$ ändert. Anders ausgedrückt: Gegeben sei eine Folge von einfach zusammenhängenden und endlichen Gebieten $\mathfrak{G}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) der w -Ebene, die alle $w = 0$ enthalten und die durch $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet seien. Gesucht werden topologische Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — die den Begriff der „Konvergenz von $\mathfrak{G}_n$ gegen $\mathfrak{G}_0$ “ präzisieren sollen —, unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren.

Was die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$ angeht, sind sogar schon vor der Klärung der Randabbildungsfragen bei einer festen konformen Abbildung abschließende Ergebnisse erzielt worden:

Satz A (CARATHÉODORY)¹. *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Uns interessiert nun in Teil II der Arbeit vor allem die Frage, unter welchen topologischen Annahmen für die $\mathfrak{G}_n$ man die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ sogar im gesamten (offenen) Einheitskreis $|z| < 1$ behaupten kann. Diesbezüglich liegen notwendige und hinreichende Bedingungen von COURANT und RADÓ vor für den Sonderfall, daß $\mathfrak{G}_0$ und die $\mathfrak{G}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) sämtlich JORDAN-Gebiete sind. Wir lösen die Frage für allgemeine $\mathfrak{G}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) vollständig, falls $\mathfrak{G}_0$ nur erreichbare Randpunkte besitzt, und zwar sind die topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ erstens $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) und zweitens eine gewisse Forderung über die Glätte der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ (§ 4). Die beiden Bedingungen lassen sich zusammenfassen in eine einzige, die verlangt, daß der in einem gewissen Sinne genommene Abstand d_n der Ränder R_n von R_0 mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt (§ 5). Nach einigen Überlegungen bezüglich des allgemeinen Falls, bei dem $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt (§ 6), wird der Sonderfall der JORDAN-Gebiete nochmals behandelt (§ 7), und gestützt auf die dort gewonnenen Ergebnisse betrachten wir in § 8 solche $\mathfrak{G}_n$, die aus einem allgemeinen $\mathfrak{G}_0$ (das nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf) in spezieller Weise hervorgehen. Schließlich wird der Grad der Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ ($|z| < 1$) mittels Flächen- und Linienintegralen gemessen (§ 9).

Als zweite Gebietsfunktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ betrachten wir in Teil III die Funktion $f_0(z)$, die $\mathfrak{G}_0$ (in der z -Ebene liegend, $z = 0$ enthaltend) konform und

¹) Vgl. CARATHÉODORY [5], S. 126 und [7], S. 73 ff. In [5] wird noch gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ angenommen.

normiert auf $|w| < 1$ abbildet. Das Problem lautet wieder: Ändert sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$? Oder in Analogie zur obigen Fragestellung: Welches sind die topologischen Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$), unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren? Eine zu Satz A parallele Auskunft gibt

Satz B (BIEBERBACH)²⁾. *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}_0$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Wenn wir uns jedoch nicht auf abgeschlossene Teile von $\mathfrak{G}_0$ beschränken wollen, so tritt im Vergleich zu vorhin noch die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet haben³⁾. Es ist daher zweckmäßiger, statt der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ gewisse Arten von „stetiger Konvergenz“ zu untersuchen (§§ 11–13); erst im Sonderfall $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$) können wir wieder über $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in \mathfrak{G}_0$, $n \rightarrow \infty$) Aussagen machen (§ 14).

Diesen Untersuchungen in Teil II und III vorangehend sind in Teil I neben einer kurzen Zusammenstellung der verwendeten Begriffe (§ 1) zwei Paragraphen mit funktionentheoretischen und topologischen Hilfssätzen (§§ 2–3). Besonders die erstgenannten Hilfssätze sind grundlegend wichtig beim Beweis unserer Konvergenzsätze; die einheitliche Methode zu ihrer Gewinnung ist das „Prinzip des DIRICHLETSchen Integrals“.

Nicht behandelt werden in dieser Arbeit Fragen, die sich mit der numerischen Erfassung der Abweichung der Funktionen $f_n(z)$ von $f_0(z)$ befassen, also z.B. Fragen um die JULIASche Variationsformel ([19] und [16]) und die Theorie der konformen Abbildung kreisnaher Gebiete, soweit numerische Gesichtspunkte vorherrschend sind (z.B. [2], [3], [14], [20], [23], [25], [26], [36]). Ebenso wenig beschäftigen wir uns mit der Approximation der Ableitungen $f_0^{(p)}(z)$ durch $f_n^{(p)}(z)$ für $n \rightarrow \infty$ (z.B. [24], [29], [34], [37], [39]), und schließlich werden auch Konvergenzsätze für allgemeinere, topologische Abbildungsfunktionen nicht berücksichtigt ([21]).

Teil I

Vorbereitungen

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen

Wir erläutern zunächst einige Begriffe, die in der Arbeit benützt werden⁴⁾.

Es sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene, das den Punkt $z=0$ enthalte; es heißt *endlich* (bzw. *beschränkt*), wenn $z=\infty$ nicht innerer (bzw. äußerer) Punkt von $\mathfrak{G}$ ist.

Ein endlicher Punkt P des Randes R von $\mathfrak{G}$ ist *erreichbar*, wenn es einen von $z=0$ nach P verlaufenden JORDAN-Bogen C_1 gibt, der abgesehen vom

²⁾ Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren, der sich bei BIEBERBACH [4], S. 13 findet. Schwächere Formen jenes Satzes sind schon in [1], insbes. S. 557.

³⁾ Bei Satz B spielt das keine Rolle; denn $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) hat zur Folge, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{G}_n$ enthalten ist für $n > \bar{n}$.

⁴⁾ Vgl. dazu CARATHÉODORY ([5], [6]) und GATTEGNO-OSTROWSKI ([17], [18]).

Punkt P ganz in $\mathfrak{G}$ liegt; die erreichbaren Randpunkte liegen dicht auf R , d.h. jeder Punkt von R ist Häufungspunkt erreichbarer Randpunkte.

Verbindet ein JORDAN-Bogen C_2 zwei verschiedene Randpunkte P_1, P_2 von $\mathfrak{G}$ und verläuft sonst völlig in $\mathfrak{G}$, so heißt C_2 ein *Querschnitt* in $\mathfrak{G}$ und dieser zerlegt $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$. Liegt der Punkt $z=0$ nicht auf C_2 so enthalte z.B. $\mathfrak{G}_1$ diesen Punkt. Wir sagen dann, $\mathfrak{G}_2$ sei der durch C_2 erzeugte *Abschnitt* von $\mathfrak{G}$ oder ein Punkt aus $\mathfrak{G}_2$ werde durch C_2 *abgeschnitten* (oder auch *abgetrennt*). $\mathfrak{G}_2$ ist ein δ -Abschnitt, wenn C_2 einen Durchmesser $\leq \delta$ hat; C_2 heißt in diesem Falle δ -Querschnitt.

Will man bei der konformen Abbildung des endlichen Gebiets $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ durch $z=f(w)$ auch die Abbildung des Randes R untersuchen, so zerlegt man R zweckmäßig in eine Menge von *Primenden*. Das zu dem Punkt w_0 ($|w_0|=1$) gehörige Primende $\mathfrak{P}=f(w_0)$ von $\mathfrak{G}$ ist die Menge aller Häufungspunkte von Folgen $\{f(w_n)\}$, wenn $\{w_n\}$ beliebig gegen w_0 konvergiert ($|w_n| < 1$). Jedes solche Primende ist entweder ein einziger Randpunkt von $\mathfrak{G}$ oder aber ein abgeschlossenes Kontinuum von Punkten von R ; *verschiedene Primenden* (d.h. Primenden, die zu verschiedenen w -Werten gehören) können gemeinsame Punkte haben oder sogar aus denselben Punkten bestehen. Sind verschiedene Primenden eines Gebiets $\mathfrak{G}$ fremd, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ habe nur *einfache Primenden*.

Wichtig ist, daß sich die Primenden von $\mathfrak{G}$ rein topologisch charakterisieren lassen. Ist $\{C_n\}$ eine Folge von Querschnitten in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_n$ ihre Abschnitte $\mathfrak{A}_{n+1} \subset \mathfrak{A}_n$, und strebt der Durchmesser von C_n gegen Null, so ist die Punktmenge $\bigcap_n \overline{\mathfrak{A}_n}$ ein Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$. Die Punktfolge $\{z_k\}$ strebt gegen $\mathfrak{P}$, wenn zu jedem n_0 ein k_0 existiert derart, daß $z_k \in \mathfrak{A}_{n_0}$ ($k > k_0$). Für die C_n , die $\mathfrak{P}$ definieren, kann man konzentrische Kreisbogen wählen, deren Mittelpunkt ein gewisser Punkt auf $\mathfrak{P}$ (*Hauptpunkt*) ist ([6], S. 343).

Besitzt $\mathfrak{P}=f(w_0)$ einen erreichbaren Randpunkt z_0 (und dann nur einen), so ist z_0 Hauptpunkt von $\mathfrak{P}$. In diesem Falle ist auch die Abbildungsfunktion $z=f(w)$ bei Annäherung an w_0 „stetig im Winkelraum“, d.h. es ist $\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = z_0$ bei Annäherung im Winkelraum.

Nun sei $\{\mathfrak{G}_n\}$ eine Folge einfach zusammenhängender endlicher Gebiete der z -Ebene, die alle $z=0$ im Innern enthalten. Gibt es keine Kreisscheibe um $z=0$, die allen $\mathfrak{G}_n$ angehört, so heißt $z=0$ der *Kern* $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ der Gebietsfolge. Andernfalls wird das größte, $z=0$ enthaltende Gebiet $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ mit der Eigenschaft, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}_n$ liegt für $n > n_0$, als *Kern* der Gebietsfolge bezeichnet. Die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ heißt *konvergent gegen* $\mathfrak{K}$, wenn jede Teilfolge von $\{\mathfrak{G}_n\}$ den Kern $\mathfrak{K}$ hat; wir schreiben dann $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{K}$. Die ausgearteten Fälle, daß $\mathfrak{K}$ aus der ganzen Ebene besteht oder identisch ist mit $z=0$, sind im folgenden ohne Bedeutung.

§2. Funktionentheoretische Hilfssätze

Beim Beweis unserer Sätze über das Verhalten von Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ sind vor allem drei Hilfssätze über das Randverhalten einer festen konformen Abbildung von Bedeutung.

Hilfssatz 1 (WOLFF). Der Kreis $|z| < 1$ sei durch $w = f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ endlicher Fläche A abgebildet. Der in $|z| < 1$ liegende Teil von $|z - z_0| = r$ sei mit $k(r)$ bezeichnet ($|z_0| = 1$; $0 < r < 1$), und $L(r) \leq \infty$ sei die Länge des Bildes von $k(r)$ bei der Abbildung durch $w = f(z)$.

(i) Dann ist $L(r) < \infty$ f.ü. in $0 < r < 1$, und es ist im LEBESGUESchen Sinne

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r} dr \leq \pi A \quad (0 \leq a < b \leq 1).$$

(ii) Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ gibt derart, daß das Bild von $k(\varrho)$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}$ der Länge $L(\varrho) \leq \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r} \right)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Eine entsprechende Aussage für die Umkehrfunktion liefert der folgende

Hilfssatz 2 (FERRAND). Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, z_0 ein endlicher Randpunkt von $\mathfrak{G}$, und $D \leq \infty$ der Durchmesser von $\mathfrak{G}$. Der Durchschnitt von $|z - z_0| = r$ ($r < \frac{D}{2}$) mit $\mathfrak{G}$ ist eine höchstens abzählbare Menge von Kreisbogen $k_i(r)$, deren Bilder bei der konformen Abbildung $w = f(z)$ von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ die Längen $l_i(r) \leq \infty$ haben mögen, und es sei $L(r) = \sum_i l_i(r)$ gesetzt.

(i) Dann ist $L(r) < \infty$ f.ü. in $0 < r < \frac{D}{2}$, und es ist im LEBESGUESchen Sinne

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r} dr \leq 2\pi^2 \quad \left(0 \leq a < b \leq \frac{D}{2} \right).$$

(ii) Daraus folgt, daß es zu jedem $r < \min\left(1, \frac{D^2}{4}\right)$ ein ϱ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho) \leq \frac{2\pi}{(\log 1/r)^{\frac{1}{2}}}$ ist.

Wir benötigen eine Erweiterung von Hilfssatz 1, da wir es gelegentlich mit Gebieten zu tun haben, deren Fläche $A = \infty$ ist.

Hilfssatz 3. Der Kreis $|z| < 1$ sei durch $w = f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende, endliche Gebiet $\mathfrak{G}$ abgebildet. Für eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $|z| < 1$ sei das Bild von $\mathfrak{M}$ in der w -Ebene vom endlichen inneren Flächenmaß A . Die höchstens abzählbar vielen Teile von $k(r)$ (Hilfssatz 1), deren Punkte innere Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, seien mit $k_i(r)$ bezeichnet, und deren Bilder bei der Abbildung durch $w = f(z)$ mögen eine Länge $l_i(r) \leq \infty$ haben; schließlich sei noch $L(r) = \sum_i l_i(r) \leq \infty$ gesetzt.

(i) Dann gilt (i) von Hilfssatz 1.

(ii) Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho) \leq \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r} \right)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Man beachte, daß die Normierung von $f(z)$ in Hilfssatz 1–3 keine Rolle spielt.

Historisch ist folgendes zu bemerken. Allen drei Hilfssätzen liegt die sog. „Methode des DIRICHLETSchen Integrals“ zugrunde, was in diesem Zusammenhang soviel heißt wie: Abschätzung von Kurvenlängen durch Gebietsflächen mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung. Diese Methode geht auf COURANT zurück (vgl. [10], insbes. S. 104–105). Hilfssatz 1 stammt im wesentlichen von WOLFF ([41], S. 217–218), leicht schwächere Formen finden sich aber schon in WOLFF [40], S. 96 und TSUJI [31], S. 93–95; in obiger Form steht er bei WARSCHAWSKI [36], S. 337–338. Hilfssatz 2 wurde von FERRAND bewiesen ([13], S. 150–152); in GATTEGNO-OSTROWSKI ([17], S. 50) wird der Satz versehentlich WOLFF [41] zugeschrieben.

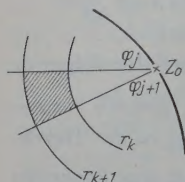


Fig. 1

Obwohl die Beweise der Hilfssätze ähnlich verlaufen, wollen wir doch in Anbetracht ihrer Wichtigkeit für unsere Entwicklungen wenigstens Hilfssatz 3 beweisen.

Beweis von Hilfssatz 3. Wir überziehen den Ring $a \leq |z - z_0| \leq b$ mit einem Polarkoordinatennetz (r, φ) , dessen größte Maschenweite (Durchmesser der Maschen) ε_ν sei ($\{\varepsilon_\nu\}$ sei eine Nullfolge); das $(\nu + 1)$ -te Netz gehe durch Unterteilung (z. B. Halbierung) aus dem ν -ten Netz hervor. Sämtliche (endlich vielen) offenen Maschen des ν -ten Netzes, die samt Rand nur innere Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten, fassen wir zu einer offenen Menge $O^{(\nu)} \subset \mathfrak{M} \subset \{|z| < 1\}$ zusammen. Die endlich vielen Kreisbogenstücke von $|z - z_0| = r$ ($a \leq r \leq b$), die in $O^{(\nu)}$ liegen, seien mit $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet, und es ist sofort klar, daß einerseits

$$(2.1) \quad \bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) \subset \bigcup_i k_i(r)$$

ist, andererseits aber auch

$$\lim_{\varepsilon_\nu \rightarrow 0} \bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) = \bigcup_i k_i(r).$$

Das Bild von $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ liegt völlig in $\mathfrak{G}$ drin, sei mit $\gamma_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet und habe eine Länge $l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, und schließlich setzen wir noch $L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, wobei wegen der monotonen Verfeinerung unseres Netzes

$$(2.2) \quad L(r, \varepsilon_\nu) \text{ bei festem } r \text{ und } \varepsilon_\nu \rightarrow 0 \text{ monoton gegen } L(r) \text{ wächst.}$$

Dann ist

$$L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) = \int_{\sum_i k_i(r, \varepsilon_\nu)} |f'(z)| |dz| = \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})| r d\varphi$$

($\int$ über endlich viele φ -Intervalle erstreckt), also vermöge der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} L^2(r, \varepsilon_\nu) &= \left(\int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})| \sqrt{r} \sqrt{r} d\varphi \right)^2 \\ &\leq \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r d\varphi \cdot \int r d\varphi < \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r d\varphi \cdot r\pi. \end{aligned}$$

Integriert man diese Ungleichung über r im Intervall $r_k < r < r_{k+1}$, wo ja nach Konstruktion die φ -Intervalle sich nicht ändern, so erhält man

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{L^2(r, \varepsilon_v)}{r} dr < \pi \cdot \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr,$$

und rechts steht die Fläche des Bildes des Teils von $O^{(v)}$, der in $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ liegt, multipliziert mit π . Summiert man noch über die endlich vielen k -Werte auf, so kommt

$$\int_a^b \frac{L^2(r, \varepsilon_v)}{r} dr < \pi \cdot A.$$

Wegen (2.2) ist die Funktionenfolge $\left\{ \frac{L^2(r, \varepsilon_v)}{r} \right\}$ bei festem r und $v \rightarrow \infty$ monoton wachsend und besitzt daher (vgl. z.B. TITCHMARSH [30], S. 346–347) f.ü. in $\langle a, b \rangle$ eine endliche Grenzfunktion $\frac{L^2(r)}{r}$ derart, daß

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r} dr \leq \pi \cdot A$$

gilt, d.h. (i) ist bewiesen. Daraus folgt nun aber sofort (ii). Wäre nämlich $L(\varrho) > \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r} \right)^{\frac{1}{2}}$ für alle ϱ in $\langle r, \sqrt{r} \rangle$, so wäre auch

$$\int_r^{\sqrt{r}} \frac{L^2(\varrho)}{\varrho} d\varrho > \frac{2\pi A}{\log 1/r} \cdot \log \frac{\sqrt{r}}{r} = \pi \cdot A,$$

im Widerspruch zu (i).

§3. Topologische Hilfssätze

Um die Beweisführung in den nachfolgenden Sätzen nicht unterbrechen zu müssen, führen wir noch zwei einfache topologische Hilfssätze an.

Hilfssatz 4. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet, das $|w| < m$ enthält, und dessen Rand R von endlich vielen Kreisscheiben k_i vom Radius $\delta < \frac{m}{8}$ überdeckt sei; jede Scheibe enthalte tatsächlich einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$. In jedem k_i wähle man einen Punkt P_i und verbinde P_i mit P_j genau dann durch eine Gerade, wenn der Abstand $P_i, P_j < 4\delta$ beträgt. (Insbesondere werden P_i und P_j verbunden, wenn $k_i \cap k_j \neq \emptyset$ ist.)*

Dann gibt es einen (sich eventuell überschlagenden) geschlossenen Polygonzug π , bestehend aus Strecken $P_i P_j$, der 0 umfaßt; d.h. es ist unmöglich, 0 mit ∞ durch eine JORDAN-Kurve C zu verbinden, ohne π zu treffen.

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \bigcup_i k_i$ und $w = f(z)$ die normierte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}$. Wir zeichnen $|z| = r < 1$. Für $r > r_0$ gehört das Bild C_r von $|z| = r$ völlig zu $\mathfrak{M}$. Andernfalls gäbe es eine Folge von Punkten $p_i \in \mathfrak{G}$

mit $p_i \rightarrow R$ und $p_i \notin \mathfrak{M}$; dies geht nicht, da $\mathfrak{M}$ den Rand von $\mathfrak{G}$ ganz überdeckt und $\mathfrak{M}$ offen ist. Eine solche Kurve C_r halten wir fest; sie ist einfach geschlossen, analytisch, und enthält $w=0$ im Innern. Statt der Kreise k_i zeichnen wir nun Kreise k'_i mit Radien 5δ um dieselben Mittelpunkte und bilden $\mathfrak{M}' = \bigcup_i k'_i$. $\mathfrak{M}'$ enthält 0 nicht: Wäre $0 \in k'_i$, d.h. der Abstand des Mittelpunkts von k_i von $w=0$ kleiner als 5δ , so gäbe es einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ mit Abstand $< 5\delta + \delta$ von $w=0$; Widerspruch. Also trennt $\mathfrak{M}'$ den Punkt $w=0$ von $w=\infty$: Jede von $w=0$ nach $w=\infty$ laufende JORDAN-Kurve trifft nämlich R und also $\mathfrak{M}'$. Wir bemerken noch: Jede Polygonseite liegt ganz in $\mathfrak{M}'$; denn sie ist höchstens 4δ lang und ist P_i der eine Endpunkt, so enthält k'_i die Seite $P_i P_j$.

Nun durchlaufen wir C_r in $\mathfrak{M}$ und markieren eine gewisse Kreisfolge. Von k_i komme man längs C_r in den neuen Kreis k_{i+1} (eventuell kommt man in mehrere, man greife dann einen heraus), was die Folge $k_1, k_2, \dots, k_m, k_1$ ergebe, in der derselbe Kreis auch mehrfach auftreten kann. Da $k_i \cap k_{i+1} \neq 0$ ist, sind P_i und P_{i+1} verbunden, und $P_1, P_2, \dots, P_m, P_1$ ist ein geschlossener Polygonzug π in $\mathfrak{M}'$. π und C_r sind in $\mathfrak{M}'$ homolog: Eine Strecke P_i, P_{i+1} läßt sich nämlich offenbar stetig auf ein Stück P'_i, P'_{i+1} von C_r deformieren, ohne daß man $\mathfrak{M}'$ verläßt. Also umfaßt wie C_r auch π den Punkt $w=0$.

Wir verwenden Hilfssatz 4 beim Beweis des

Hilfssatz 5. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in \mathfrak{G}$, das in $|w| < M$ liege. Die (nicht notwendig beschränkten oder endlichen) Gebiete $\mathfrak{G}_n$ mit $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}$ haben Punkte in $|w| \geq 2M$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $Q_n \in \mathfrak{G}_n$ ($n \geq n_0$) in $|w| \geq 2M$ gibt es einen in der ε -Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$ verlaufenden geradlinigen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $< \varepsilon$, der Q_n von $w=0$ abschneidet.*

Beweis. Wenn $|w| < m$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, wählen wir ein positives δ mit $\delta < \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, \frac{M}{4}, \frac{m}{8}\right)$ und überdecken den Rand R von $\mathfrak{G}$ durch eine endliche Zahl von Kreisen k_i mit Radien δ und Mittelpunkten auf R . Für ein n_0 liegen nun in jedem Kreis k_i Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$ ($n > n_0$). Andernfalls gäbe es einen k_j derart, daß die Gebiete $\mathfrak{G}_{n_1}, \mathfrak{G}_{n_2}, \dots, \mathfrak{G}_{n_k}, \dots$ keine Randpunkte in k_j haben, d.h. der Kern der Teilfolge $\{\mathfrak{G}_{n_k}\}$ enthält entweder keinen Punkt von k_j oder ganz k_j , im Widerspruch zu $\mathfrak{G}_{n_k} \rightarrow \mathfrak{G}$. Wir fassen also ein festes $n > n_0$ ins Auge und markieren in jedem k_i einen Randpunkt P_i von $\mathfrak{G}_n$. Punkte P_i, P_j mit Abstand $< 4\delta$ verbinden wir geradlinig und greifen dann aus der Menge der gezeichneten Strecken einen (sich eventuell überschlagenden) Polygonzug π heraus, der $w=0$ umfaßt; dies ist nach Hilfssatz 4 möglich.

Da nun $\mathfrak{G}_n$ einen Punkt Q_n ($r_n e^{i\varphi_n}$) in $|w| \geq 2M$ hat, verbinden wir $w=0$ mit Q_n durch einen Polygonzug $\mathfrak{P}_n$, der völlig in $\mathfrak{G}_n$ liegt. Dieser $\mathfrak{P}_n$ trifft π sicher; andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{P}_n$, zusammen mit dem Halbstrahl $\arg w = \varphi_n$ ($|w| \geq r_n$), eine Verbindungskurve von $w=0$ nach $w=\infty$, die π nicht trifft, was unmöglich ist.

Wir betrachten nun $\mathfrak{P}_n$ näher. Sei A_1 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit π , von $w=0$ aus gesehen. Aus $A_1 \in \mathfrak{P}_n$ folgt $A_1 \in \mathfrak{G}_n$, und man bezeichne mit A'_1, A''_1 die beiden ersten Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, die man erhält, wenn man von A_1 auf π nach beiden Seiten fortschreitet; spätestens sind die Endpunkte der Polygonseite, auf der A_1 liegt, Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, da dieselben nach Konstruktion gewisse Punkte P_i, P_j sind. Sei B_1 der letzte Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit A'_1, A''_1 . Verläßt $\mathfrak{P}_n$ die Strecke A'_1, A''_1 auf derselben Seite, wie $\mathfrak{P}_n$ diese Strecke betreten hat, so ziehen wir eine kleine Strecke parallel A'_1, A''_1 derart, daß der durch Zwischenschalten dieser Strecke abgeänderte Polygonzug $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ die Strecke A'_1, A''_1 nicht mehr trifft. Sei A_2 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ mit π ; er existiert, da ja $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ ebenso wie $\mathfrak{P}_n$ die Punkte $w=0$ und Q_n verbindet. Liegen die Verhältnisse wie bei A_1 , so verfahren wir entsprechend. Kommen nur Fälle dieser Art vor, so haben wir nach endlich vielen Schritten ($\mathfrak{P}_n$ und π haben nur endlich viele Schnittpunkte) $\mathfrak{P}_n$ so abgeändert, daß er überhaupt keine Seite von π schneidet; dies ist unmöglich, wie wir sahen.

Also tritt an einer Stelle eine Strecke R_1, R_2 auf von der Länge $< 4\delta$, die einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ bildet und die überdies so beschaffen ist, daß das erste Betreten und das letzte Verlassen dieser Strecke durch $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ (aus $\mathfrak{P}_n$ entstandener Polygonzug in $\mathfrak{G}_n$, der $w=0$ mit Q_n verbindet) auf verschiedenen Seiten geschieht.

Insgesamt merken wir an: R_1, R_2 ist ein geradliniger Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $< 4\delta < \varepsilon$, und da z.B. P_i in der δ -Umgebung eines Randpunkts von $\mathfrak{G}$ liegt, liegt R_1, R_2 in der $(5\delta < \varepsilon)$ -Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$. Außerdem trennt q_n den Punkt Q_n von $w=0$ ab: Offenbar läßt sich nämlich wohl E mit $w=0$ in $\mathfrak{G}_n$ verbinden, ohne daß man q_n trifft, nicht aber L , d.h. L liegt in dem durch q_n erzeugten Abschnitt von $\mathfrak{G}_n$; Q_n kann man aber mit L in $\mathfrak{G}_n$ verbinden ohne q_n zu treffen, also liegt Q_n auch in diesem genannten Abschnitt. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

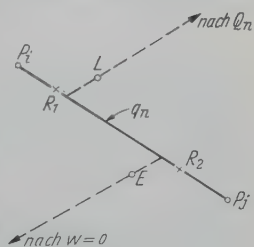


Fig. 2

Teil II

Verhalten der Funktionen, die $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden

Nach unseren Vorbereitungen kommen wir nunmehr zum eigentlichen Thema der Arbeit. Vorgegeben sind in der w -Ebene einfach zusammenhängende und endliche Gebiete $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$), die alle $w=0$ enthalten mögen, und die durch die Funktionen $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet seien; dabei heißt z.B. $f_0(z)$ normiert, wenn $f_0(0)=0$, $f'_0(0)>0$ ist.

Wir stellen die Frage, unter welchen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ die Funktion $f_0(z)$ in $|z| < 1$ durch $f_n(z)$ approximiert wird. Approximation

in welchem Sinne? Wann $f_n(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$ gleichmäßig gegen $f_0(z)$ strebt, ist durch den in der Einleitung genannten Satz A völlig entschieden. Hier wollen wir dagegen möglichst weitgehende Bedingungen dafür angeben, daß $f_n(z)$ gleichmäßig in $|z| < 1$ gegen $f_0(z)$ strebt; wir schreiben absichtlich nicht „ $|z| \leq 1$ “, damit auch solche Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ zugelassen sind, die in $|z| \leq 1$ nicht stetig sind.

§4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz

Die eben aufgeworfene Frage wird in abschließender Weise erledigt, falls von $f_0(z)$ die Stetigkeit in $|z| \leq 1$ angenommen werden kann. Äquivalent hierzu wäre bekanntlich, daß $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist und nur erreichbare Randpunkte besitzt, wovon die erste Bedingung keine wesentliche Einschränkung bedeutet, während die zweite weiter unten noch untersucht werden wird.

Zur einfachen Formulierung unseres Ergebnisses benützen wir ein Maß für die Glattheit des Randes R_n von $\mathfrak{G}_n$, das von WARSCHAWSKI [36] eingeführt wurde. Für jedes $\delta > 0$ betrachten wir sämtliche Querschnitte q in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\lambda_q \leq \delta$, die Abschnitte vom Durchmesser A_q erzeugen mögen. Die obere Grenze all dieser A_q ist unser Glattheitsmaß; in Formeln

$$\eta_n(\delta) = \left(\overline{\lim}_{\lambda_q \leq \delta} A_q \right)^{(n)}.$$

Zur Erläuterung dieser Funktion $\eta_n(\delta)$ beweisen wir folgenden einfachen

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}_n$ beschränkt, so strebt (bei festem n) genau dann $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), wenn $w = f_n(z)$ in $|z| \leq 1$ stetig ist, d.h. wenn $\mathfrak{G}_n$ nur erreichbare Randpunkte besitzt.*

Demnach gilt also für jedes JORDAN-Gebiet die Aussage $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), ebenso wie z.B. für einen längs eines Radius aufgeschlitzten Kreis.

Beweis. Ist zunächst $f_n(z)$ nicht stetig in $|z| \leq 1$, dann gibt es $z'_k \rightarrow z_0$, $z''_k \rightarrow z_0$ ($k = 1, 2, \dots$; $|z_0| = 1$) so, daß $f_n(z'_k) \rightarrow w_1$ und $f_n(z''_k) \rightarrow w_2$ strebt für $k \rightarrow \infty$ ($w_1 \neq w_2$). Nach Hilfssatz 1 können wir um z_0 einen Bogen $k(\varrho)$ des Kreises $|z - z_0| = \varrho$ schlagen, dessen Bild $\gamma(\varrho)$ einen beliebig kleinen Durchmesser hat, falls das r in $r < \varrho < |r|$ hinreichend klein ist, und wegen $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) ist auch der durch $\gamma(\varrho)$ erzeugte Abschnitt von beliebig kleinem Durchmesser bei genügend kleinem r . In diesem Abschnitt müssen aber wegen $z'_k \rightarrow z_0$, $z''_k \rightarrow z_0$ die Punkte $f_n(z'_k)$ und $f_n(z''_k)$ liegen ($k > k_0$), so daß $w_1 \neq w_2$ nicht möglich ist.

Sei nun umgekehrt $f_n(z)$ stetig in $|z| \leq 1$, und es existiere eine Folge von Punktepaaren w'_k, w''_k aus $\mathfrak{G}_n$ mit $|w'_k - w''_k| \geq \alpha > 0$, die durch Querschnitte q_k in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_k \rightarrow 0$ von $w = 0$ abgeschnitten seien. Die Anwendung von Hilfssatz 2 ergibt sofort, daß die Urbilder q'_k von q_k in der z -Ebene Durchmesser $\delta'_k \rightarrow 0$ aufweisen. Die Punkte $z'_k = f_n^{-1}(w'_k)$ und $z''_k = f_n^{-1}(w''_k)$ liegen aber in dem zu q'_k gehörigen Abschnitt drin, so daß wegen der Stetigkeit von $f_n(z)$ in $|z| \leq 1$ sicher $f_n(z'_k) - f_n(z''_k) \rightarrow 0$ streben müßte ($k \rightarrow \infty$), im Widerspruch zur Annahme.

Wir kommen nun zu unserem angekündigten

Satz 2 (Allgemeiner Konvergenzsatz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$) der w -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_0$, $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet; $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte.

Dann sind die Bedingungen

$$(4.1) \quad \mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(4.2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\delta) = \bar{\eta}(\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmäßig in $|z| < 1$ gegen $f_0(z)$ strebt⁵⁾.

Vorbemerkungen. a) Die Bedingung (4.2) läßt sich umschreiben auf

$$(4.2') \quad \lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \eta_n(\delta) = 0;$$

man hat dabei lediglich zu beachten, daß $\eta_n(\delta)$ bei festem n eine mit δ monoton fallende Funktion ist.

b) Anschaulich besagt somit (4.2) folgendes: Es ist unmöglich, daß für beliebig kleine δ und beliebig große n δ -Abschnitte von $\mathfrak{G}_n$ auftreten, deren Durchmesser $\geq \alpha > 0$ bleibt.

c) Unser Satz 2 verbessert ein Resultat von WARSCHAWSKI ([36], S. 347 und Fußnote) einerseits dadurch, daß bei uns hinreichende und notwendige Bedingungen angegeben werden, und andererseits kann auf die dortigen Forderungen $D_i(R_n, R_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) („innere Distanz“) und $A_n \leq A$ (A_n = Fläche von $\mathfrak{G}_n$) verzichtet werden. Man beachte, daß bei WARSCHAWSKI wegen $\eta_0(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) auch nur solche $\mathfrak{G}_0$ mit lauter erreichbaren Randpunkten betrachtet werden (Satz 1).

Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 6. Gelten für die Gebiete $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_n$ von Satz 2 die Bedingungen (4.1) und (4.2), so gibt es keinen Häufungspunkt P_0 von Punkten $P_n \in \mathfrak{G}_n$, der außerhalb $\overline{\mathfrak{G}_0}$ liegt⁶⁾.

Beweis. (i) Liegt $\mathfrak{G}_0$ völlig in $|w| \leq M$, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{G}_n$ schließlich (d.h. für $n > n_0$) in $|w| \leq 2M$ gelegen ist. Andernfalls könnte man für beliebig hohe Indizes n Punkte $Q_n \in \mathfrak{G}_n$ in $|w| > 2M$ finden, die vermöge Hilfssatz 5 durch Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \rightarrow 0$ von

⁵⁾ An dieser Stelle wollen wir auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen unserer Bedingung (4.2') für eine Folge von JORDAN-Gebieten und der Unbewalltheit des Randes R eines festen JORDAN-Gebiets $\mathfrak{G}$ an einer Stelle $w_0 \in R$ ([33] und [27]) hinweisen. Unterwirft man nämlich ein $\mathfrak{G}$, das der letzteren Forderung genügt, einer Folge von einfachen linearen Transformationen, die w_0 festhalten und $\mathfrak{G}_n$ als Bild von $\mathfrak{G}$ erzeugen mögen, so zeigt sich, daß diese Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gerade die Bedingungen (4.1) und (4.2') erfüllen. Dadurch ist vermöge der Theorie der variablen Gebiete die Möglichkeit gegeben, das Verhalten einer festen Abbildungsfunktion durch Betrachtung einer Funktionenfolge zu untersuchen. Vgl. auch die Einleitung zu [33] und die dort zitierte Literatur.

⁶⁾ Die Umkehrung ist offensichtlich falsch (Fig. 12).

$w=0$ abgeschnitten würden, und zwar verlaufen diese q_n in der ε_n -Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$, also sicher in $|w| \leq M + \varepsilon_n$, so daß die Abschnitte einen Durchmesser $> M - \varepsilon_n$ haben müssen. Die Bedingung (4.2') und damit (4.2) kann daher nicht erfüllt sein.

(ii) Sei nun P_0 ein Häufungspunkt von Punkten $P_n \in \mathfrak{G}_n$, der außerhalb $\mathfrak{G}_0$ liegt. Durch eine lineare Abbildung $w' = l(w)$ werfen wir unter Festhaltung von $w=0$ den P_0 nach $w' = \infty$, wobei $\mathfrak{G}_0$ in ein beschränktes (in $|w'| \leq M'$ gelegenes) Gebiet $\mathfrak{G}'_0$ übergeht, und entsprechend $\mathfrak{G}_n$ in $\mathfrak{G}'_n$. Die Voraussetzung (4.1) besagt nunmehr $\mathfrak{G}'_n \rightarrow \mathfrak{G}'_0$. Nach Annahme gibt es Punkte $P'_n \in \mathfrak{G}'_n$ mit $P'_n \rightarrow \infty$, die wieder nach Hilfssatz 5 durch Querschnitte q'_n in $\mathfrak{G}'_n$ vom Durchmesser $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ von $w=0$ abgetrennt werden können, und zwar verlaufen die q'_n in $|w'| \leq M' + \varepsilon'_n$. In der w -Ebene bedeutet dies: Es gibt Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \rightarrow 0$, die in $|w - P_0| \geq a > 0$ verlaufen, und die Punkte P_n von $w=0$ abtrennen, die in beliebiger Nähe von P_0 liegen. Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung (4.2).

Beweis von Satz 2. (i) Die Voraussetzungen (4.1) und (4.2) seien erfüllt, weshalb die $\mathfrak{G}_n$ schließlich gleichmäßig beschränkt sind (Hilfssatz 6); ihr Flächeninhalt sei $\leq A$ ($n > n_0$). Wir nehmen an, es existiere eine Folge n_k mit

$$|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k})| \geq \alpha > 0 \quad (0 < \alpha < 1),$$

wobei wegen Satz A im Falle $z_{n_k} \rightarrow z_0$ sicher $|z_0| = 1$ ist. Nun wählen wir $\delta > 0$ so, daß $\eta_n(\delta) < \frac{\alpha}{2}$ ist für $n > \bar{n}$, und bestimmen danach ein r derart, daß

$$(\alpha) \quad \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r} \right)^{\frac{1}{2}} < \delta \quad \text{und} \quad (\beta) \quad |f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{6}$$

ist ($|z_{1,2} - z_0| < r$, $|z_{1,2}| < 1$); für (β) verwenden wir die Stetigkeit von $f_0(z)$ in $|z| \leq 1$. Für unser r zeichnen wir unser $k(r)$ ein und wählen ein festes z^* im entsprechenden Abschnitt. Für dieses z^* merken wir an

$$|f_{n_k}(z^*) - f_0(z^*)| < \frac{\alpha}{3}$$

für genügend großen Index n_k .

Nun betrachten wir solche z_{n_k} unserer Folge, die in $|z - z_0| < r$ liegen. Für sie gilt einerseits

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z^*)| &= |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k}) + f_0(z_{n_k}) - f_0(z^*) + f_0(z^*) - f_{n_k}(z^*)| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits gibt es (Hilfssatz 1) ein $q = q_{n_k}$ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ so, daß das Bild von $k(q_{n_k})$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}_{n_k}$ vom Durchmesser $< \left(\frac{2\pi A_{n_k}}{\log 1/r} \right)^{\frac{1}{2}} < \delta$ ist. Der zugehörige Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ enthält $f_{n_k}(z_{n_k})$ und $f_{n_k}(z^*)$, hat also sicher einen Durchmesser $\geq \frac{\alpha}{2}$, d.h. es wäre $\eta_{n_k}(\delta) \geq \alpha/2$ für beliebig große n_k , im Widerspruch zur Annahme (4.2).

(ii) Gilt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$), so ist zunächst (4.1) erfüllt (Satz A). Gäbe es Folgen $\delta_k \rightarrow 0$ und $n_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) mit $\eta_{n_k}(\delta_k) > \alpha > 0$, so wählen wir erstens $\varepsilon > 0$ so, daß $|f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{2}$ wird für $|z_1 - z_2| < \varepsilon$, $|z_{1,2}| < 1$, und zweitens einen Index $\bar{n}$ und eine Zahl $\varkappa > 0$ so, daß $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\alpha}{4}$ ($|z| < 1$) ist ($n > \bar{n}$) und derart, daß jeder Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ ($n > \bar{n}$) vom Durchmesser $< \varkappa$ ein Urbild in der z -Ebene vom Durchmesser $< \varepsilon$ hat (Hilfssatz 2; man beachte, daß wegen der schon erwiesenen Gültigkeit von (4.1) das D in Hilfssatz 2 oberhalb einer festen positiven Konstanten liegt). In dem zu obigem δ_k gehörigen Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ mögen die Punkte w'_k, w''_k liegen ($|w'_k - w''_k| \geq \alpha > 0$), und für deren Urbilder z'_k, z''_k gilt nun, sobald $\delta_k < \varkappa$ und $n_k > \bar{n}$ ist,

$$|f_{n_k}(z'_k) - f_{n_k}(z''_k)| = |f_{n_k}(z'_k) - f_0(z'_k) + f_0(z'_k) - f_0(z''_k) + f_0(z''_k) - f_{n_k}(z''_k)| \\ < \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

entgegen der Annahme $|w'_k - w''_k| \geq \alpha$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

§5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes

Ein Blick auf (4.1) und (4.2), sowie auf den Beweis von Satz 2 zeigt, daß unsere Bedingungen, unter denen $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) gilt, zerlegt sind in eine erste [nämlich (4.1)], die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq r < 1$, $n \rightarrow \infty$) garantiert, und eine zweite [nämlich (4.2)], die das „Anhängen“ von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet. Wir wollen in diesem Paragraphen die beiden Bedingungen zu einer einzigen kombinieren, die verlangt, daß *der in einem gewissen Sinne genommene Abstand der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ vom Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt*. Praktisch wird diese Bedingung weniger handlich sein als (4.1) und (4.2), jedoch lassen sich daran anschließend Überlegungen anstellen für den seither ausgeschlossenen Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt.

a) Eine Metrik für Primenden. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei beschränkt und einfach zusammenhängend und enthalte $w = 0$. Wir betrachten zwei Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es Querschnitte q in $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w = 0$ trennen; ihr Durchmesser sei λ_q . Als Entfernung der beiden Primenden bezeichnen wir nun die Zahl

$$D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = \varliminf_q \lambda_q.$$

Insbesondere liegt $\mathfrak{P}_2$ in der ε -Umgebung von $\mathfrak{P}_1$, wenn es einen ε -Querschnitt in $\mathfrak{G}$ gibt, der $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w = 0$ trennt.

Durch die Entfernungsfunktion D ist eine *Metrik im Raume der Primenden von $\mathfrak{G}$* erklärt. Von den drei Bedingungen

- (i) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \geq 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$,
- (ii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1)$,
- (iii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3) \leq D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3)$,

sind nämlich die beiden ersten offenbar erfüllt. Um (iii) zu prüfen, zeichnen wir Querschnitte q_1 und q_2 in $\mathfrak{G}$ vom Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + \varepsilon$ bzw. $< D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + \varepsilon$, die $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ von $w=0$ trennen; die entsprechenden Abschnitte seien g_1, g_2 . Ist $g_1 \subset g_2$ oder $g_2 \subset g_1$, so trennt q_2 bzw. q_1 die Primenden $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3$ von $w=0$ ab und (iii) ist erfüllt. Andernfalls schneiden sich die Ränder von g_1 und g_2 , da ja wegen $\mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_1, \mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_2$ sicher $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$ ist. Das bedeutet, daß sich q_1, q_2 schneiden, und also trennt eine geeignete Zusammensetzung q von zwei Stücken von q_1 und q_2 die Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ von $w=0$ ab; q hat aber einen Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + 2\varepsilon$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein JORDAN-Gebiet, so stimmt die durch die obige Metrik definierte Topologie überein mit der gewöhnlichen Topologie, in welcher der Abstand zweier Randpunkte w_1, w_2 von $\mathfrak{G}$ erklärt ist durch $|w_1 - w_2|$ ⁷⁾. Ist nämlich $w = f(z)$ die in $|z| \leq 1$ stetige und umkehrbar eindeutige Abbildungsfunktion von $|z| \leq 1$ auf $\mathfrak{G}$, so folgt aus $|w_1 - w_2| < \varepsilon$ sofort $|z_1 - z_2| < \varepsilon'(\varepsilon)$, also nach dem WOLFFSchen Hilfssatz 1 $D(w_1, w_2) < \varepsilon''(\varepsilon)$, mit $\varepsilon''(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$); analog ist der Schluß von $D(w_1, w_2) \rightarrow 0$ auf $|w_1 - w_2| \rightarrow 0$.

Auf ähnliche Weise zeigt man: Für ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ mit $O \in \mathfrak{G}$ ist die durch die konforme Abbildung gelieferte, sog. „natürliche“ Zuordnung der Primenden von $\mathfrak{G}$ auf $|z|=1$ umkehrbar eindeutig und stetig, d.h. topologisch, im Sinne der oben eingeführten Topologie⁸⁾. Wir fügen noch hinzu, daß jede topologische Abbildung φ von $|z|=1$ auf die Primenden von $\mathfrak{G}$ dadurch entsteht, daß man zuerst $|z|=1$ einer topologischen Abbildung in sich unterwirft und dann die natürliche Abbildung N anwendet; denn es ist $\varphi = N(N^{-1}\varphi)$, wobei $N^{-1}\varphi$ den $|z|=1$ topologisch auf sich selbst abbildet.

b) FRÉCHET-Entfernung zwischen R_n und R_0 . Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$) mit $O \in \mathfrak{G}_n$ und Rändern R_n seien einfach zusammenhängend und beschränkt; ferner wollen wir von $\mathfrak{G}_0$ zunächst wieder annehmen, es besitze nur erreichbare Randpunkte. Durch $\varphi_0(t)$ sei eine topologische Abbildung der Kreislinie $|t|=1$ auf R_0 gegeben (z.B. die „natürliche“ Zuordnung); sie ist beliebig, wird aber im weiteren Verlauf festgehalten. Dagegen sei mit $\varphi_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) eine beliebige, variable, topologische Abbildung von $|t|=1$ auf R_n bezeichnet, wobei die in **a)** eingeführte Topologie für die Primenden von $\mathfrak{G}_n$ benützt werde.

Für irgend solche Darstellungen φ_n von R_n definieren wir als Entfernung entsprechender Elemente $\varphi_0(t)$ (punktförmig wegen Erreichbarkeit aller Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$) und $\varphi_n(t)$ die Zahl

$$(5.1) \quad d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)) = \max_{w \in \varphi_n(t)} |w - \varphi_0(t)|,$$

und als von φ_n noch abhängige Entfernung zwischen R_n und R_0

$$(5.2) \quad d_n(\varphi_n) = \max_{|t|=1} d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)).$$

⁷⁾ Zwei in derselben Menge $\mathfrak{M}$ erklärte Topologien heißen übereinstimmend oder auch gleichwertig, wenn es für jeden Punkt $P \in \mathfrak{M}$ zu jeder Umgebung $U^{(1)}$ von P im Sinne der ersten Topologie eine Umgebung $U^{(2)}$ von P im Sinne der zweiten Topologie gibt derart, daß $U^{(2)} \subset U^{(1)}$ ist, und umgekehrt.

⁸⁾ Vgl. dazu auch CARATHÉODORY [6], S. 351, Fußnote *).

Daß hierin (5.1) für jedes feste n und festes t existiert, ist klar, da ja jedes Primende von $\mathfrak{G}_n$ eine abgeschlossene Punktmenge ist. Bezüglich der Existenz von $d_n(\varphi_n)$ zeigen wir zunächst:

Hilfssatz 7. Die Funktion $\psi(t) = d(\varphi_0(t), \varphi_n(t))$ ist für jedes feste $n = 1, 2, \dots$ eine auf $|t| = 1$ nach oben halbstetige Funktion⁹⁾; es ist sogar $\psi(t_0) = \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \psi(t)$ für alle t_0 auf $|t| = 1$.

Beweis. (i) Für eine beliebige Folge $t_m \rightarrow t_0$ wählen wir $w_m \in \varphi_n(t_m)$ so, daß $|w_m - \varphi_0(t_m)| = d(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m))$. Ferner sei $w'_m \in \mathfrak{G}_n$ so nahe an w_m gewählt, daß sowohl $w_m - w'_m \rightarrow 0$ als auch bei der konformen Abbildung durch f_n^{-1} sicher $z_m - z'_m \rightarrow 0$ strebt ($m \rightarrow \infty$, $|z_m| = 1$, $|z'_m| < 1$). Mit $\varphi_n(t_m) \rightarrow \varphi_n(t_0)$ im Sinne unserer Topologie strebt auch $z_m \rightarrow f_n^{-1} \varphi_n(t_0)$ und $z'_m \rightarrow f_n^{-1} \varphi_n(t_0)$, weshalb $f_n(z'_m)$ alle Häufungspunkte auf $\varphi_n(t_0)$ hat. Also ist, weil ja auch $\varphi_0(t_m) \rightarrow \varphi_0(t_0)$,

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= d(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)) \geq \overline{\lim}_m |\varphi_0(t_0) - f_n(z'_m)| \\ &= \overline{\lim}_m |\varphi_0(t_0) - w_m| = \overline{\lim}_m |\varphi_0(t_m) - w_m|, \end{aligned}$$

also gilt $\overline{\lim}_m \psi(t_m) \leq \psi(t_0)$.

(ii) Sei $w_0 \in \varphi_n(t_0)$ so, daß $|w_0 - \varphi_0(t_0)| = d(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0))$. Da das Primende $\varphi_n(t_0)$ auch als Durchschnitt von abgeschlossenen Abschnitten definiert werden kann, deren zugehörige Querschnitte Durchmesser aufweisen die gegen Null streben, stellt man leicht fest, daß w_0 auch Häufungspunkt von Punkten $w_m \in \varphi_n(t_m)$ ist für eine gewisse Folge $t_m \rightarrow t_0$ mit $t_m \neq t_0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= d(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)) = |w_0 - \varphi_0(t_0)| = \lim_m |w_m - \varphi_0(t_0)| \\ &\leq \overline{\lim}_m d(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_m)) = \overline{\lim}_m d(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m)), \end{aligned}$$

also gilt $\overline{\lim}_m \psi(t_m) \geq \psi(t_0)$.

Da hiernach sicher $\psi(t_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \psi(t)$ ist, liegt für $\psi(t)$ Halbstetigkeit nach oben vor, was wiederum zur Folge hat, daß die Funktion $\psi(t)$ auf $|t| = 1$ ihr Maximum annimmt ([8], S. 115).

Also existiert $d_n(\varphi_n)$ für alle zugelassenen Darstellungen φ_n von R_n , und wir definieren nun als FRÉCHET-Entfernung der Ränder R_n, R_0 die Zahl

$$(5.3) \quad d_n \equiv d_n(R_n, R_0) = \inf_{\varphi_n} d_n(\varphi_n),$$

wobei φ_n alle zugelassenen Darstellungen von R_n durchläuft. Unser Begriff erweitert damit den Begriff der FRÉCHET-Entfernung zwischen zwei JORDAN-Kurven ([15]), der schon früher in diesem Zusammenhang Verwendung gefunden hat (vgl. § 7).

⁹⁾ Das heißt es ist $\psi(t_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \psi(t)$; vgl. z.B. [8], S. 114. Daß $\psi(t)$ im allgemeinen keine stetige Funktion ist, sieht man an einfachen Beispielen.

c) **Andere Form des Konvergenzsatzes.** Unter Benutzung des in b) eingeführten Begriffs der FRÉCHET-Entfernung d_n zwischen R_n und R_0 können wir nun Satz 2 eine andere Form geben.

Satz 3. Die einfach zusammenhängenden und beschränkten¹⁰⁾ Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$) (Ränder R_n) der w -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet; $\mathfrak{G}_0$ besitze nur erreichbare Randpunkte.

Dann ist die Bedingung

$$(5.4) \quad d_n \equiv d_n(R_n, R_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmäßig in $|z| < 1$ gegen $f_0(z)$ strebt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (5.4) die Bedingungen (4.1) und (4.2) nach sich zieht. Zu diesem Zweck betrachten wir für jedes $n=1, 2, \dots$ eine topologische Darstellung φ_n von R_n , für die $d_n(\varphi_n) < d_n + \varepsilon_n$, also $d_n(\varphi_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) strebt.

(i) Die Bedingung (4.1) ist erfüllt. Sei $\{P_n\}$ irgendeine Folge von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. $P_n \in \varphi_n(t_n)$, und z. B. $t_n \rightarrow t_0$ ($n \rightarrow \infty$). Aus der Erklärung von $d_n(\varphi_n)$ und $d_n(\varphi_n) \rightarrow 0$ folgt sofort, daß $|P_n - \varphi_0(t_n)| \rightarrow 0$, also $|P_n - \varphi_0(t_0)| \rightarrow 0$ strebt für $n \rightarrow \infty$. Alle Häufungspunkte der Folge $\{P_n\}$ liegen somit auf dem Rand von $\mathfrak{G}_0$. Andererseits ist auch jeder Punkt von R_0 Häufungspunkt von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. es gilt gewiß (4.1).

(ii) Die Bedingung (4.2) ist erfüllt. Andernfalls könnte man eine Teilfolge der n finden (weiter mit n bezeichnet) und Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}, \mathfrak{P}_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ mit $D(\mathfrak{P}_n^{(1)}, \mathfrak{P}_n^{(2)}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), auf denen aber andererseits Punkte $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}$ liegen mit $|P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| \geq \alpha > 0$. Deren Parameterwerte in der Darstellung für R_n durch unser gewähltes $\varphi_n(t)$ seien $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}$.

Fall 1. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \rightarrow 0$. Dann ist $\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)}) \rightarrow 0$ und also

$$\begin{aligned} d(\varphi_0(t_n^{(1)}), \varphi_n(t_n^{(1)})) + d(\varphi_0(t_n^{(2)}), \varphi_n(t_n^{(2)})) &\geq |[\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)})] - [P_n^{(1)} - P_n^{(2)}]| \\ &= |P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| + o(1) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad (n > \bar{n}); \end{aligned}$$

dies ist im Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Fall 2. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \geq \beta > 0$ für eine gewisse Teilfolge, die wir wiederum mit n bezeichnen. Dann haben die Endpunkte $P_n^{(3)}, P_n^{(4)}$ der Querschnitte q_n , die die Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}, \mathfrak{P}_n^{(2)}$ abschneiden, Parameterwerte $t_n^{(3)}, t_n^{(4)}$, für die erst recht $|t_n^{(3)} - t_n^{(4)}| \geq \beta > 0$ gilt. Obige Abschätzung gibt daher wieder für unsere gewählten φ_n

$$\begin{aligned} d(\varphi_0(t_n^{(3)}), \varphi_n(t_n^{(3)})) + d(\varphi_0(t_n^{(4)}), \varphi_n(t_n^{(4)})) \\ \geq |[\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})] - [P_n^{(3)} - P_n^{(4)}]| \geq |\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})| + o(1), \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Die Beschränktheit der $\mathfrak{G}_n$ ist keine einschneidende Voraussetzung, da sie im Falle $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) ja ohnehin erfüllt sein muß, sofern $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist.

was nicht gegen Null streben kann für $n \rightarrow \infty$, da ja $t_n^{(3)} - t_n^{(4)} \rightarrow 0$. Auch im Fall 2 erhalten wir also einen Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \rightarrow 0$; also gilt (4.2).

Umgekehrt implizieren (4.1) und (4.2) zusammen die Gültigkeit von (5.4). Liegt nämlich für die Darstellung von R_0 die natürliche Abbildung N_0 von $|t|=1$ zugrunde, so wähle man $\varphi_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) ebenfalls als natürliche Abbildung von $|t|=1$ auf R_n , und man hat infolge $|f_n(z) - f_0(z)| \leq \varepsilon_n$ ($|z| < 1$) auch sofort $d_n(\varphi_n) \leq \varepsilon_n$, also erst recht $d_n = d_n(R_n, R_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Wenn aber von einer beliebigen topologischen Darstellung $\psi(t)$ von R_0 ausgegangen war, $\psi = N_0(N_0^{-1}\psi)$, so wähle man einfach für die Darstellung von R_n die Abbildung $\varphi_n = N_n(N_0^{-1}\psi)$, und genau so wie oben sieht man ein, daß auch in diesem Falle $d_n(\varphi_n) \rightarrow 0$ strebt für $n \rightarrow \infty$.

§6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt

Wir wollen nun einige Überlegungen anstellen, deren Ziel es ist, auch in dem seither ausgeschlossenen Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ gewisse Aussagen zu machen; zu abschließenden Ergebnissen werden wir allerdings hier nicht gelangen.

Man wird zunächst versuchen, auch in diesem allgemeineren Falle eine FRÉCHET-Entfernung $d_n(R_n, R_0)$ zu erklären, wozu man lediglich (5.1) abändern wird zu

$$(5.1') \quad d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)) = \max_{w_1 \in \varphi_0(t); w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2|;$$

$d_n(\varphi_n)$ und $d_n(R_n, R_0)$ können wie oben erklärt werden. Indessen kann beim Vorliegen nicht punktförmiger Primenden von $\mathfrak{G}_0$ der Ausdruck (5.1') und daher $d_n(R_n, R_0)$ nie beliebig klein werden, obwohl $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1, n \rightarrow \infty$) wohl möglich ist.

Auch dann, wenn (5.1) nicht durch (5.1'), sondern durch

$$(5.1'') \quad d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)) = \min_{w_1 \in \varphi_0(t); w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2|$$

ersetzt wird [also durch den Abstand der Punktmengen $\varphi_0(t), \varphi_n(t)$], ergibt sich keine zweckmäßige FRÉCHET-Distanz. Diese kann nämlich, sogar für ein JORDAN-Gebiet $\mathfrak{G}_0$, gegen Null streben, ohne $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ zu implizieren. Ein Beispiel dafür kann man mit Hilfe einer Konstruktion von CARATHÉODORY ([6], S. 366) herleiten.

Drittens stellen wir fest:

Satz 4. Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist (5.4) äquivalent zur folgenden Bedingung:

$$(6.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt topologische Abbildungen } \varphi_n(t) \text{ von } |t|=1 \text{ auf } R_n \text{ derart, daß} \\ \text{für jedes } t_0 \text{ die Menge } \varphi_0(t_0) \text{ identisch ist mit der Menge aller Häufungs-} \\ \text{punkte von Folgen } \{\varphi_n(t_n)\}, \text{ wo } \{t_n\} \text{ alle möglichen gegen } t_0 \text{ konvergenten} \\ \text{Folgen durchläuft.} \end{array} \right.$$

Beweis. Der erste Teil des Beweises [aus (5.4) folgt (6.1)] folgt aus Satz 3(i). Ist umgekehrt (6.1) erfüllt für eine gewisse Folge von Abbildungen $\varphi_n(t)$, so nehme man dieselben zur Bildung von (5.1) und (5.2). Es ist $d_n(R_n, R_0) \leq d_n(\varphi_n)$, und wäre $d_n(R_n, R_0) \rightarrow 0$ falsch, so könnte man also Parameterwerte t_n finden ($t_n \rightarrow t_0$), für die $d(\varphi_0(t_n), \varphi_n(t_n)) \geq \alpha > 0$, also $|\varphi_0(t_n) - P_n| \geq \alpha > 0$ wäre für eine Teilfolge der n . Also würde auch $|\varphi_0(t_0) - P_n| \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ bestehen, im Gegensatz zur Annahme (6.1).

Wir sehen nun aber, daß die Bedingung (6.1) ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden kann, daß $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt; das bedeutet lediglich, daß $\varphi_0(t_0)$ nicht mehr wie oben aus einem Punkte zu bestehen braucht. Es entsteht also die Frage, ob (6.1) für das Bestehen von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1, n \rightarrow \infty$) für allgemeines $\mathfrak{G}_0$ notwendig und hinreichend ist.

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3, aber für allgemeines $\mathfrak{G}_0$, ist (6.1) notwendig, aber nicht hinreichend für das Bestehen von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1, n \rightarrow \infty$).*

Beweis. (i) Die Bedingung (6.1) ist notwendig. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit (s. oben) annehmen, $\varphi_0(t)$ sei die natürliche Darstellung von R_0 , und wir wählen dann $\varphi_n(t)$ ebenso als die natürliche Darstellung von R_n .

a) Ist $t_n \rightarrow t_0$, $P_n \in \varphi_n(t_n)$, so gibt es wegen $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ ($|z| < 1, n \rightarrow \infty$) einen Punkt $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $|Q_n - P_n| \rightarrow 0$. Die Folge $\{Q_n\}$ hat aber bloß Häufungspunkte auf $\varphi_0(t_0)$, also gilt dies auch für $\{P_n\}$.

b) Ist Q_0 ein beliebiger Punkt auf $\varphi_0(t_0)$, so gibt es eine Folge $t_n \rightarrow t_0$ und Punkte $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $Q_n \rightarrow Q_0$. Wieder in Folge $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ finden wir Punkte $P_n \in \varphi_n(t_n)$ mit $|P_n - Q_n| \rightarrow 0$, also ist Q_0 tatsächlich Häufungspunkt von Punkten auf $\varphi_n(t_n)$.

(ii) Um zu zeigen, daß (6.1) nicht hinreicht, um $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1, n \rightarrow \infty$) zu garantieren, betrachten wir das folgende Beispiel.

Wir definieren $\mathfrak{G}_n$ durch die konforme Abbildung von $|z| < 1$ vermöge

$$(6.2) \quad f_n(z) = f_0(e^{i\varepsilon_n} z) e^{-i\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty);$$

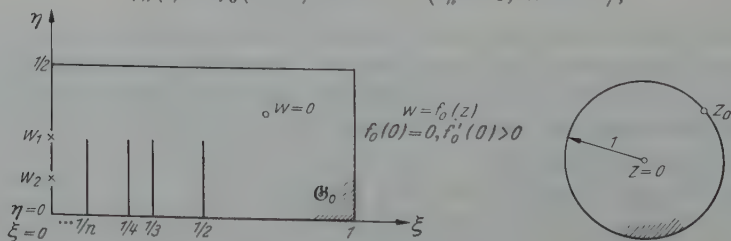


Fig. 3

das bedeutet, daß $\mathfrak{G}_n$ durch Rotation um $w=0$ um den Winkel ε_n aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgeht, weshalb (6.1) sicher erfüllt ist (man nehme die natürlichen Abbildungen φ_n). Die Funktionen $f_n(z)$ sind weiter normiert: $f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$; all dies gilt unabhängig von der Wahl der ε_n .

Andererseits ist nun aber für eine gewisse Wahl der ε_n die Relation $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) nicht erfüllt. Um dies einzusehen, fixieren wir w_1 und w_2 auf dem nicht punktförmigen Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}_0$, das $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ entspreche; w_1 sei der erreichbare Randpunkt von $\mathfrak{P}$, w_2 ein nicht erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{P}$. Es gibt Punkte $\zeta_n = r_n e^{i\vartheta_n}$ mit $r_n \nearrow 1$, $\vartheta_n \rightarrow \vartheta_0$, $f_0(\zeta_n) \rightarrow w_2$, und wir setzen in (6.2) jetzt $\varepsilon_n = \vartheta_n - \vartheta_0$. Für $z_n = r_n e^{i\vartheta_0}$ hat man dann einerseits

$$f_n(z_n) = f_0(e^{i\vartheta_n - i\vartheta_0} \cdot r_n e^{i\vartheta_0}) e^{-i(\vartheta_n - \vartheta_0)} = f_0(e^{i\vartheta_n} \cdot r_n) e^{-i(\vartheta_n - \vartheta_0)} \rightarrow w_2,$$

andererseits aber

$$f_0(z_n) = f_0(r_n e^{i\vartheta_0}) \rightarrow w_1,$$

also sicher nicht

$$f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0 \quad (|z| < 1, n \rightarrow \infty).$$

§7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß sämtliche Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$) JORDAN-Gebiete mit $O \in \mathfrak{G}_n$ sind; sie seien von den JORDAN-Kurven C_n berandet, und $w = f_n(z)$ seien die konformen und normierten Abbildungen von $|z| \leq 1$ auf $\mathfrak{G}_n$. Wir beabsichtigen, diesen Sonderfall mit Hilfe unseres Satzes 2 noch etwas genauer zu untersuchen.

Zunächst führen wir die diesbezüglichen bekannten Ergebnisse an¹¹⁾, damit der Zusammenhang mit unseren Resultaten deutlich wird.

Satz C (COURANT). *Notwendig und hinreichend dafür, daß $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1$, $n \rightarrow \infty$) gilt, sind die folgenden Bedingungen:*

(i) *Jeder Häufungspunkt einer beliebigen Punktfolge $\{P_n\}$ mit $P_n \in C_n$ liegt auf C_0 .*

(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\bar{n}(\varepsilon)$ und ein $\delta(\varepsilon)$ mit $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) derart, daß es für jeden Punkt $P_0 \in C_0$ und beliebige Punkte $P_1 \in \mathfrak{G}_n$, $P_2 \in \mathfrak{G}_n$ ($n > \bar{n}$) aus der ε -Umgebung von P_0 einen Streckenzug l_n in $\mathfrak{G}_n$ gibt, der P_1 mit P_2 verbindet und einen Durchmesser $< \delta(\varepsilon)$ hat¹²⁾.*

Ist für die Folge $\{C_n\}$ bloß (i) erfüllt, so spricht COURANT von „gewöhnlicher Konvergenz $C_n \rightarrow C_0$ “; sind dagegen (i) und (ii) beide erfüllt, so wird von „glatter Konvergenz $C_n \rightarrow C_0$ “ gesprochen ([11], S. 69).

Satz D (RADÓ). *Notwendig und hinreichend dafür, daß $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1$, $n \rightarrow \infty$) gilt, ist die Bedingung $d_n \rightarrow 0$, wenn d_n die FRÉCHET-Entfernung der JORDAN-Kurven C_n , C_0 [im Sinne unserer Definition (5.3)] bezeichnet.*

Weiterhin wird unser Sonderfall noch im Rahmen eines schon in § 4 zitierten allgemeinen Satzes bei WARSCHAWSKI [36] besprochen. Wenn wir nun im folgenden eine weitere Bedingung hinzufügen, unter der $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$

¹¹⁾ Vgl. dazu COURANT [10], S. 106—109 und [11], sowie RADÓ [28], S. 182. Die Äquivalenz der Bedingungen von COURANT und RADÓ wurde von MARKOUCEVITCH [24], S. 874 nachgewiesen.

¹²⁾ Dieser Satz wird in der Literatur verschiedentlich ungenau zitiert; vgl. GATTEGNO-OSTROWSKI [17], S. 28—29 und Enzyklopädie [22], S. 375, Fußnote 636.

($|z| \leq 1, n \rightarrow \infty$) gilt, so deshalb, weil wir darin die Bedingungen von COURANT und RADÓ trennen in eine erste, die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq r < 1, n \rightarrow \infty$) garantiert, und eine zweite, die das „Anhängen“ von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet; die zweite Bedingung drückt eine gewisse Glattheit der Ränder R_n aus und ist völlig unabhängig von der Beziehung von $\mathfrak{G}_n$ zu $\mathfrak{G}_0$.

Um diese zweite Bedingung übersichtlich darstellen zu können, führen wir folgendes Maß $\kappa_n(\delta)$ für die Glattheit der JORDAN-Kurve C_n ein. Wir betrachten irgend zwei Punkte $P_1 \in C_n, P_2 \in C_n$, deren Abstand $\leq \delta$ ist, und die C_n in die Teile $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ mit Durchmessern $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ zerlegen. Sodann setzen wir $A = \min(A_n^{(1)}, A_n^{(2)})$ und

$$(7.1) \quad \kappa_n(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in C_n; P_2 \in C_n \\ |P_1 - P_2| \leq \delta}} A.$$

Satz 6 (JORDAN-Gebiete). *Notwendig und hinreichend dafür, daß $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \rightarrow \infty$) gilt, sind die Bedingungen*

$$(7.2) \quad \mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(7.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \kappa_n(\delta) = 0.$$

Vorbemerkung. Die Bedingung (7.3) ist nicht etwa lediglich eine andere Form von (4.2) oder (4.2'). Denn einmal macht, im Gegensatz zu (4.2'), unsere jetzige Bedingung (7.3) keinen Gebrauch von der Tatsache, daß C_n ein Gebiet berandet, und zum andern folgt aus $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$) nicht immer $\kappa_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$), wie aus beigezeichnetem Beispiel ersichtlich ist.



Fig. 4

Beweis von Satz 6. (i) Aus (7.3) folgt (4.2'), d. h. $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$). Andernfalls gäbe es für eine Teilfolge der n Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_n \rightarrow 0$, die Abschnitte vom Durchmesser $\geq \alpha > 0$ erzeugen¹³). Nimmt man die Endpunkte von q_n als Punkte P_1, P_2 bei der Bildung von (7.1), so sieht man, daß sowohl $A_n^{(1)}$ als auch $A_n^{(2)}$ einen Durchmesser $\geq \alpha$ aufweisen, d. h. (7.3) wäre falsch. Also sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, was $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \rightarrow \infty$) zur Folge hat.

(ii) Ist umgekehrt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \rightarrow \infty$), so ist (7.2) eine Folge von Satz A, und (7.3) bleibt zu bestätigen.

Zu beliebigen Zahlen $\alpha > 0, \beta > 0$ führen wir dazu die Funktionen $\sigma(\alpha), \tau(\beta)$ ein: Ist $|w' - w''| < \alpha$ ($w', w'' \in C_0$), so sei $|f_0^{-1}(w') - f_0^{-1}(w'')| < \sigma(\alpha)$, und ist $|z' - z''| < \beta$ ($|z'| = |z''| = 1$), so sei $|f_0(z') - f_0(z'')| < \tau(\beta)$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f_0(z)$ auf $|z| = 1$ und von $f_0^{-1}(w)$ auf C_0 ist $\sigma(\alpha) \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$) und $\tau(\beta) \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 0$).

¹³) Die Zahl α kann kleiner als der Radius eines Kreises angenommen werden, der allen $\mathfrak{G}_n$ angehört; einen solchen Kreis gibt es wegen (7.2).

Nun wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ_0 und $\bar{n}$ derart, daß gilt:

- a) Es ist $\delta_0 < \varepsilon$ und $\tau(\sigma(3\delta)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\delta \leq \delta_0$;
 b) Es ist $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\delta_0}{3}$ für $n > \bar{n}$ und $|z| \leq 1$.

Sind dann $f_n(z_1)$ und $f_n(z_2)$ irgend zwei Punkte auf C_n vom Abstand $\leq \delta_0$, so gilt

$$\begin{aligned} |f_0(z_1) - f_0(z_2)| &\leq |f_0(z_1) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + |f_n(z_2) - f_0(z_2)| \\ &\leq \frac{\delta_0}{3} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{3} < 3\delta_0, \end{aligned}$$

also $|z_1 - z_2| < \sigma(3\delta_0)$. Für einen beliebigen Punkt z des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) hat man somit

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_n(z_1)| &\leq |f_n(z) - f_0(z)| + |f_0(z) - f_0(z_1)| + |f_0(z_1) - f_n(z_1)| \\ &< \frac{\delta_0}{3} + \tau(\sigma(3\delta_0)) + \frac{\delta_0}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h. der Durchmesser des Bildes des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) ist höchstens ε ; also ist (7.3) erfüllt.

Durch Einschalten einer Zwischenabbildung gewinnt man leicht folgenden Zusatz zu Satz 6.

Zusatz. Die in Satz 6 betrachteten JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$) seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}_z$ der z -Ebene abgebildet, das den Punkt $z=0$ enthalte. Dann sind die Bedingungen (7.2) und (7.3) notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in \mathfrak{G}_z$, $n \rightarrow \infty$).

§8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$

In den §§ 4–6 haben wir gesehen, daß für den Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ die in dieser Arbeit behandelten Probleme noch weitgehend offen sind. Wir wollen jetzt einen Sonderfall behandeln, bei dem zwar $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf; jedoch sollen die $\mathfrak{G}_n$ in spezieller Weise aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgehen, indem ein „glatter“ Teil des Randes von $\mathfrak{G}_0$ abgeändert wird. Diese Sachlage kann z. B. bei Anwendungen in der Theorie der Approximation im Komplexen auftreten. Allerdings wird es uns wieder nicht möglich sein, $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($n \rightarrow \infty$) im ganzen Einheitskreis zu erschließen (was durch ein Gegenbeispiel belegt wird), sondern nur in einem gewissen, an $|z|=1$ heranreichenden Teil von $|z| \leq 1$.

a) Ein Glattheitsmaß für JORDAN-Bögen. In Analogie zu dem Glattheitsmaß $\kappa(\delta)$ einer geschlossenen JORDAN-Kurve verwenden wir im folgenden ein Glattheitsmaß $\lambda(\delta)$ eines offenen JORDAN-Bogens γ . Sind $P_1 \in \gamma$, $P_2 \in \gamma$ zwei Punkte vom Abstand $\leq \delta$, die auf γ einen Teilbogen vom Durchmesser A begrenzen, so setzen wir

$$(8.1) \quad \lambda(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in \gamma, P_2 \in \gamma \\ |P_1 - P_2| \leq \delta}} A.$$

Über das Verhalten des Glattheitsmaßes λ bei einer konformen Abbildung gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz 8. *In einem abgeschlossenen Teilbereich B_z eines Gebietes $\mathfrak{G}_z$ sei eine Folge $\{\gamma_n\}$ von JORDAN-Bögen gegeben. $\mathfrak{G}_z$ werde durch $\bar{z} = \varphi(z)$, $z = \psi(\bar{z})$ umkehrbar eindeutig und konform auf $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$ abgebildet, wobei $\{\gamma_n\}$ in $\{\bar{\gamma}_n\}$ übergehe.*

Dann sind die Aussagen $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \lambda_n(\delta) = 0$ und $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \bar{\lambda}_n(\delta) = 0$ äquivalent¹⁴⁾.

Beweis. Wir können annehmen, $\varphi(z)$ sei in $\bar{\mathfrak{G}}_z$ regulär und schlicht. Sei $0 < c \leq |\varphi'(z)| \leq C < \infty$ ($z \in \mathfrak{G}_z$) und $\Delta = \text{dist}(B_z, \text{Rand von } \mathfrak{G}_z)$. Sodann betrachten wir nach Vorgabe eines positiven $\varepsilon < \Delta C$ alle $\bar{\delta}$ und n , für die

$$\bar{\delta} < c \cdot \Delta \quad \text{und} \quad \lambda_n\left(\frac{\bar{\delta}}{c}\right) < \frac{\varepsilon}{C}$$

ist, d.h. alle $\bar{\delta} < \bar{\delta}_0(\varepsilon)$, $n > \bar{n}(\varepsilon)$.

Sind nun $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ beliebige Punkte $\in B_{\bar{z}} = \varphi(B_z)$ vom Abstand $< \bar{\delta}$, so liegt ihre Verbindungsgerade ganz in $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$. Denn wäre $\bar{\zeta}$ ein Randpunkt von $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$, der auf der Verbindungsgeraden $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ dem Punkt $\bar{z}_1$ am nächsten liegt, so hätten wir für den Abstand der Urbilder in der z -Ebene

$$|z_1 - \zeta| = \left| \int_{\bar{z}_1}^{\bar{\zeta}} \psi'(\bar{z}) d\bar{z} \right| \leq c^{-1} |\bar{\zeta} - \bar{z}_1| < c^{-1} \cdot c \Delta = \Delta,$$

im Widerspruch zur Definition von Δ .

Liegen nun unsere Punkte $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ vom Abstand $\leq \bar{\delta}$ auf $\bar{\gamma}_n$, so haben wir für die Urbilder in der z -Ebene

$$|z_1 - z_2| = \left| \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} \psi'(\bar{z}) d\bar{z} \right| \leq c^{-1} \cdot |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \leq c^{-1} \bar{\delta},$$

also wird durch z_1, z_2 ein Stück vom Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{C}$ von γ_n abgetrennt. Da $\frac{\varepsilon}{C} < \Delta$ ist, kann man um z_1 einen Kreis schlagen, der ganz in $\mathfrak{G}_z$ liegt und das abgetrennte Stück von γ_n enthält. Für einen Punkt $\bar{z}$ auf $\bar{\gamma}_n$ haben wir deshalb

$$|\bar{z}_1 - \bar{z}| = \left| \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}} \psi'(\bar{z}) d\bar{z} \right| \leq C \cdot |z - z_1| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

also ist der Durchmesser des durch $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ begrenzten Stücks von $\bar{\gamma}_n$ sicher $< 2\varepsilon$. Somit gilt $\bar{\lambda}_n(\bar{\delta}) < 2\varepsilon$ für alle betrachteten $n, \bar{\delta}$.

Der zweite Teil der Aussage von Hilfssatz 8 folgt durch Betrachtung der konformen Abbildung $z = \psi(\bar{z})$ auf ähnliche Weise.

b) Ein Konvergenzsatz.

Satz 7. *Voraussetzung für die $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$). $\mathfrak{G}_0$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der w -Ebene, $O \in \mathfrak{G}_0$, dessen Rand R_0 zum Teil aus dem offenen JORDAN-Bogen γ_0 mit den Endpunkten P_1, P_2 bestehe. Es gebe zwei JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ folgender Art:*

¹⁴⁾ $\bar{\lambda}_n$ bezeichnet die zu $\bar{\gamma}_n$ gehörige Größe (8.1).

$\alpha)$ γ_0 ist ein Querschnitt in $\mathfrak{g}_2$,

$\beta)$ $\bar{\mathfrak{g}}_2$ enthält außer γ_0 keine Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$,

$\gamma)$ $\bar{\mathfrak{g}}_1 \in \mathfrak{g}_2$, $O \notin \bar{\mathfrak{g}}_2$,

$\delta)$ ein Teilbogen γ_0^* von γ_0 mit Endpunkten Q_1, Q_2 ist ein Querschnitt in $\mathfrak{g}_1$, und es ist $(\gamma_0 - \gamma_0^*) \cap \mathfrak{g}_1 = 0$.

Auf γ_0^* seien Punkte S_n, T_n gegeben und durch einen JORDAN-Bogen γ_n in $\mathfrak{g}_1$ verbunden, der γ_0^* höchstens in Punkten des Bogens S_n, T_n treffe. $\mathfrak{G}_n$ sei durch γ_n und $R_0 - (S_n, T_n)$ berandet.

Voraussetzung für B_z . Dies sei ein abgeschlossener Teilbereich von $|z| \leq 1$ mit der Eigenschaft, daß jedem auf $|z| = 1$ gelegenen Randpunkt von B_z bei der (konformen und normierten) Abbildung $w = f_0(z)$ von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}_0$ ein erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{G}_0$ entspreche¹⁵⁾.

Aussage. Wird $\mathfrak{G}_n$ durch $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet, so gilt genau dann für jeden Bereich B_z der angegebenen Art $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in B_z, n \rightarrow \infty$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(8.2) \quad \mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(8.3) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \lambda_n(\delta) = 0 \quad \text{für die JORDAN-Bögen } \gamma_n.$$

Beweis. (i) Die Bedingungen (8.2) und (8.3) seien erfüllt. Wir zeigen dann sogar: Aus $z_n \rightarrow z_0$ ($|z_0| \leq 1$) folgt stets $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$), sofern $f_0(z)$ an der Stelle z_0 stetig ist¹⁶⁾.

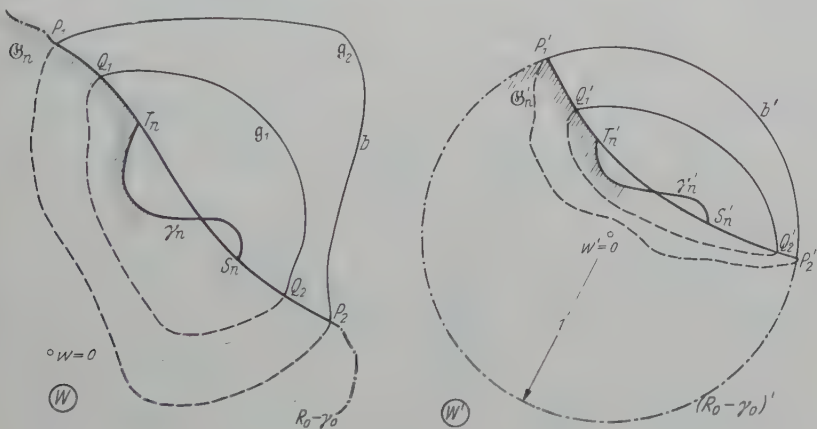


Fig. 5

Wir bilden das von $R_0 - \gamma_0$ und dem JORDAN-Bogen b berandete Gebiet (vgl. Fig. 5) vermöge $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ konform und normiert auf $|w'| < 1$

¹⁵⁾ B_z kann also insbesondere ein Teilbereich von $|z| \leq 1$ sein, der als einzige Punkte auf $|z| = 1$ die Punkte $f_0^{-1}(\gamma_0^*)$ besitzt.

¹⁶⁾ Diese Aussage ist weitergehend als $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in B_z, n \rightarrow \infty$); denn ist letztere Behauptung falsch, so gibt es $\{z_n\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ ($|z_0| = 1$) so, daß $f_n(z_n) - f_0(z_n) \rightarrow 0$ d. h. $f_n(z_n) - f_0(z_0) \rightarrow 0$ strebt ($n \rightarrow \infty$).

ab. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gehen dabei in die JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}'_n$, die JORDAN-Bögen γ_n in γ'_n über. (8.2) und (8.3) bedeuten in der w' -Ebene

$$(8.2') \quad \mathfrak{G}'_n \rightarrow \mathfrak{G}'_0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(8.3') \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \lambda'_n(\delta) = 0 \quad \text{für die JORDAN-Bögen } \gamma'_n$$

(Hilfssatz 8). Da aber der Rest des Randes von $\mathfrak{G}'_n$ (also $R'_n - \gamma'_n$) fest bleibt, so sind damit offenbar die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt ($\mathfrak{G}'_0$ ist ein JORDAN-Gebiet!), und wir haben somit für die Zwischenabbildungen $w' = g_n(z)$ von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}'_n$ ($n = 0, 1, \dots$)

$$(8.4) \quad g_n(z) \Rightarrow g_0(z) \quad (|z| \leq 1, n \rightarrow \infty).$$

Unsere Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ hängen aber mit ψ und g_n durch

$$f_n(z) = \psi(g_n(z)) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zusammen, und $\psi(w')$ ist unter anderem für alle die Werte von w' in $|w'| \leq 1$ stetig, die erreichbaren Randpunkten von $\mathfrak{G}_0$ entsprechen. Aus $z_n \rightarrow z_0$ folgt also einmal $g_n(z_n) \rightarrow g_0(z_0)$, und ferner $\psi(g_n(z_n)) \rightarrow \psi(g_0(z_0))$, d.h. $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$), und dies war zu zeigen.

(ii) Gilt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in B_z$, $n \rightarrow \infty$) speziell für einen Bereich B_z von der in der Fußnote ¹⁵⁾ genannten Art, so gilt auch $\varphi(f_n(z)) \Rightarrow \varphi(f_0(z))$, d.h. $g_n(z) \Rightarrow g_0(z)$ ($z \in B_z$, $n \rightarrow \infty$). Dies impliziert (Zusatz zu Satz 6) $\lambda'_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$) für die JORDAN-Bögen γ'_n , also auch $\lambda_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$) (Hilfssatz 8). Daß $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ notwendig ist, folgt wieder aus Satz A.

c) Ein Gegenbeispiel. Schon in § 6 hatten wir an einem einfachen Beispiel gesehen, daß $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$, zusammen mit einer Bedingung für die Glattheit der Ränder von $\mathfrak{G}_n$, im allgemeinen nicht hinreicht zur Aussage $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$). Sogar bei unserer jetzigen speziellen Bildung der $\mathfrak{G}_n$ ist dies der Fall, wie wir jetzt zeigen wollen.

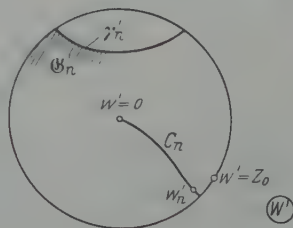
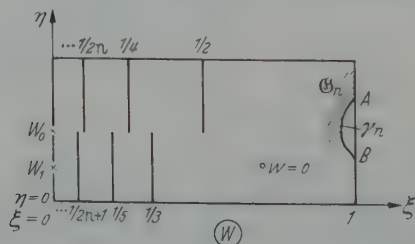


Fig. 6

Die $\mathfrak{G}_n$ gehen aus $\mathfrak{G}_0$ in der skizzierten Weise hervor; die Bögen γ_n seien vorläufig beliebig, sollen aber jedenfalls glatt [im Sinne von (8.3)] gegen die Strecke A, B konvergieren. Schaltet man wieder wie in **b)** eine Zwischenabbildung $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ (konform und normiert) ein, die $\mathfrak{G}_0$ auf $|w'| < 1$ abbildet, so wird

$$f_n(z) = \psi(g_n(z)) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \text{mit} \quad g_n(z) \Rightarrow g_0(z) = z \quad (|z| \leq 1, n \rightarrow \infty).$$

Wir markieren uns $f_0^{-1}(w_0) = z_0$ und zeichnen den Radius C ein, der von $z = 0$ nach $z = z_0$ führt; sein Bild bei der Abbildung $w' = g_n(z)$ sei C_n , ein von $w' = 0$ nach $w' = g_n(z_0)$ führender JORDAN-Bogen. Lassen wir nun die γ_n kontinuierlich und glatt gegen A, B rücken, so rückt C_n kontinuierlich und gleichmäßig gegen C (Radius von $w' = 0$ nach $w' = z_0$), und wir können daher für gewisse Bögen γ_n ($n = 1, 2, \dots$) Punkte $w'_n \in C_n$ finden, für die $f_0(w'_n) \rightarrow w_1$ strebt ($n \rightarrow \infty$, $w_1 \neq w_0$). Diese γ_n denken wir uns gewählt, und $g_n(z)$, $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) liegen nun fest. Schließlich setzen wir noch $z_n = g_n^{-1}(w'_n)$.

Dann gilt einerseits

$$f_n(z_n) = \psi(w'_n) = f_0(w'_n) \rightarrow w_1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

andererseits aber

$$f_0(z_n) = \psi(z_n) \rightarrow w_0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

da ja z_n auf C , also radial gegen z_0 strebt. Also ist $f_n(z) - f_0(z) \rightarrow 0$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) sicher falsch.

§9. Benützung anderer Normen

Unsere seitherigen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ waren stets auf die Aussage $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) zugeschnitten, d.h. auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Zugrundelegung der Norm

$$\overline{\lim}_{|z| < 1} |f_n(z) - f_0(z)|.$$

In diesem letzten Paragraphen des zweiten Teils fragen wir uns, unter welchen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ geschlossen werden kann auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Benützung der Normen

$$L_n(r, p) = \int_{|z|=r} |f_n(z) - f_0(z)|^p |dz| \quad \text{bzw.} \quad F_n(r, p) = \iint_{|z| \leq r} |f_n(z) - f_0(z)|^p dx dy;$$

dabei seien r und p jeweils festgehaltene Zahlen mit $0 < r \leq 1$ und $p > 0$ ¹⁷⁾.

a) Durch Flächenintegrale erklärte Normen. Messen wir den Grad der Approximation durch $F_n(r, p)$, so wird die Aussage besonders einfach.

Satz 8. *Die einfach zusammenhängenden und gleichmäßig beschränkten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$) der w -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet. Dann ist $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) notwendig und hinreichend dafür, daß $F_n(r, p) \rightarrow 0$ strebt ($n \rightarrow \infty$; r, p fest).*

Beweis. (i) Sei $F_n(r, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), also sicher

$$\iint_{|z| \leq r'} |f_n(z) - f_0(z)|^p dx dy \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

für ein positives $r' < 1$. Mittels eines Satzes von WALSH ([32], S. 96) folgt daraus $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq r'' < r'$, $n \rightarrow \infty$), also nach VITALI $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($n \rightarrow \infty$) in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$, so daß nach Satz A sicher $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ strebt ($n \rightarrow \infty$).

¹⁷⁾ Bedingungen, die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| < 1$, $n \rightarrow \infty$) zur Folge haben, werden wir hierbei nicht mehr erwähnen.

(ii) Es sei nun $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$). Ist $r < 1$, so kommt $F_n(r, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) direkt aus $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq r$, $n \rightarrow \infty$). Ist $r = 1$, so zerlegen wir $F_n(1, p)$ in $\int \int_{|z| \leq r}$ und $\int \int_{r \leq |z| \leq 1}$, wovonder zweite Teil

$$\leq (2A)^p \cdot \pi(1 - r^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist für $r > r_0$ (es wurde $|f_n| \leq A$ in $|z| < 1$ angenommen). Bei festem $r > r_0$ ist der erste Teil ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_0$, also $F_n(1, p) < \varepsilon$ ($n > n_0$).

b) Durch Linienintegrale erklärte Normen. Schwieriger liegen die Dinge bei Zugrundelegung der Norm $L_n(r, p)$. Den Fall, daß $r < 1$ ist, behandelt man wie oben: $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) ist [bei den gleichen Gebieten $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$)] notwendig und hinreichend für $L_n(r, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)¹⁸.

Zur Erledigung des Falls $r = 1$ stellen wir zunächst fest, daß $L_n(r, p)$ ($0 < r < 1$) bei festem n und p eine mit r stetig und monoton wachsende Funktion ist ([42], S. 160), weshalb $L_n(1, p) = \lim_{r \rightarrow 1-} L_n(r, p) \leq \infty$ gesetzt werden kann.

Für $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ist sicherlich $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) notwendig (bei den Gebieten des Satzes 8), da ja dann auch $L_n(r, p) \rightarrow 0$ strebt für jedes feste $r < 1$. Ob $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) im allgemeinen Fall für $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) auch hinreicht, ist nicht bekannt. Jedoch wird in der Literatur ([38], S. 184) folgender Satz ohne Beweis angegeben.

Satz E (POLANSKY). Gilt für die in Satz 8 genannten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$) der w -Ebene die Bedingung $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$), so folgt daraus $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für $p = 1$ und also für $0 < p \leq 1$ ¹⁹.

Für Werte von p in $0 < p \leq 2$ beweisen wir

Satz 9. Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \dots$) der w -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ und mit den Flächeninhalten $A_n < \infty$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet.

Dann sind die Bedingungen $A_n \rightarrow A_0$ und $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) hinreichend für $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für $p = 2$ und also für $0 < p \leq 2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unter den angegebenen Voraussetzungen stets

$$(9.1) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r \leq |z| \leq 1}} \int \int |f'_n(z)|^2 dx dy = 0$$

ist. Dazu setzen wir

$$A_n(r) = \int \int_{|z| \leq r} |f'_n(z)|^2 dx dy$$

und wählen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $r_0 < 1$ so, daß $A_0 - A_0(r_0) < \varepsilon$ ist. Nun halten wir r_0 fest und haben einmal $|A_n - A_0| < \varepsilon$ ($n > n_1$), und ferner

$$|A_n(r_0) - A_0(r_0)| < \varepsilon \quad (n \geq n_2 \geq n_1);$$

¹⁸ Statt Lemma II in [32], S. 96 nehme man das Lemma S. 101.

¹⁹ Man stellt nämlich leicht fest, daß die bei POLANSKY auftretende Bedingung $D_i(B_n, B_0) \rightarrow 0$ („innere Distanz“) gleichwertig ist mit $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$).

letzteres ist eine Folge von $|f'_n(z)|^2 \Rightarrow |f'_0(z)|^2$ ($|z| \leq r_0$, $n \rightarrow \infty$). All dies zusammen ergibt

$$A_n - A_n(r_0) = \iint_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f'_n(z)|^2 dx dy \leq |A_n - A_0| + |A_0 - A_0(r_0)| + |A_0(r_0) - A_n(r_0)| < 3\varepsilon \quad (n \geq n_2),$$

womit (9.1) bewiesen ist.

Auf Grund von (9.1) und $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ gibt es nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Zahlen r_0 ($\frac{1}{2} \leq r_0 < 1$) und n_0 derart, daß erstens

$$\iint_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f'_0(z)|^2 dx dy < \varepsilon$$

ist und weiter

$$\iint_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f'_n(z)|^2 dx dy < \varepsilon \quad \text{und} \quad |f'_n(z) - f'_0(z)| \leq \varepsilon \quad (|z| \leq r_0)$$

gilt für $n > n_0$. Dann gilt unter Verwendung der SCHWARZschen und MIN-KOWSKISchen Ungleichungen für $r \geq r_0$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\varphi}) - f_0(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r [f'_n(te^{i\varphi}) - f'_0(te^{i\varphi})]^2 dt^2 d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r |f'_n - f'_0| dt \right]^2 d\varphi \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^r |f'_n - f'_0|^2 dt d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |f'_n - f'_0|^2 dt d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r |f'_n - f'_0|^2 dt d\varphi \\ &\leq 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r |f'_n|^2 dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r |f'_0|^2 dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &< 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r |f'_n|^2 \cdot \frac{t}{r_0} dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r |f'_0|^2 \cdot \frac{t}{r_0} dt d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &< 2\pi\varepsilon^2 + \frac{1}{r_0} \left[\left(\iint_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f'_n(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f'_0(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leq 2\pi\varepsilon^2 + 8\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für $p=2$ und daher auch, vermöge der HÖLDERschen Ungleichung, für $0 < p < 2$.

Schließlich beweisen wir für beliebige positive Werte von p den

Satz 10. Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$) der w -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet. Der Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ sei eine geschlossene analytische JORDAN-Kurve C und jede Folge $\{P_n\}$ von Punkten $P_n \in R_n$ habe ihre Häufungspunkte auf C ²⁰⁾. Dann gilt $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für jedes feste $p > 0$.

Beweis. Dieser Satz stammt für den Fall $C: |w|=1$ von WARSCHAWSKI ([37], S. 563) ²¹⁾, und wir werden den Satz 10 durch Reduktion auf diesen

²⁰⁾ Diese Bedingung ist (Hilfssatz 6) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$, $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$), in welchem Falle die Aussage $L_n(1, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) trivial ist (Satz 2). Jedoch impliziert umgekehrt die Bedingung von Satz 10 nicht immer $\eta_n(\delta) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$).

²¹⁾ Dort werden sogar numerische Abschätzungen für $L_n(1, p)$ angegeben.

Fall beweisen. Die Funktion $f_0(z)$ ist für ein $\delta > 0$ in $|z| \leq 1 + \delta$ regulär und schlicht; es sei etwa $|f'_0(z)| \leq M$ ($|z| \leq 1 + \delta$). Auf Grund unserer Annahmen über R_n können wir ferner sagen, daß R_n ganz in dem Bild von $1 - \varepsilon_n \leq |z| \leq 1 + \varepsilon_n$ durch $w = f_0(z)$ drin liegt, wobei $\varepsilon_n \rightarrow 0$ strebt für $n \rightarrow \infty$. Wir betrachten Werte von n , für die bereits $\varepsilon_n < \delta$ ist, für die also insbesondere $f_0^{-1}(w)$ ($w \in \mathfrak{G}_n$) erklärt ist. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\varphi}) - f_0(re^{i\varphi})|^p d\varphi = \int_0^{2\pi} |f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})] - f_0(re^{i\varphi})|^p d\varphi,$$

wobei

$$|f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})] - f_0(re^{i\varphi})| = \left| \int_{re^{i\varphi}}^{f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})} f'_0(\zeta) d\zeta \right| \leq M |f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi}) - re^{i\varphi}|$$

ist, insgesamt also

$$(9.2) \quad \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\varphi}) - f_0(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leq M^p \cdot \int_0^{2\pi} |f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi}) - re^{i\varphi}|^p d\varphi.$$

Wie bereits erwähnt, fallen die Ränder der Bildgebiete von $|z| < 1$ bei den Abbildungen $f_0^{-1}f_n$ ganz in den Kreisring $1 - \varepsilon_n \leq |z| \leq 1 + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$), also strebt nach dem genannten Sonderfall von Satz 10 die rechte Seite von (9.2) gegen Null mit $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig für alle r aus $(0, 1)$. Dies beendet den Beweis von Satz 10.

Teil III

Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $|w| < 1$ abbilden

Wir kommen nun in Teil III zu dem Problem, das Verhalten der Umkehrfunktionen $w = f_n(z)$ zu untersuchen, die die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abbilden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, tritt dabei die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet besitzen. Für die Frage der Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ ist daher die gleichmäßige Konvergenz ungeeignet; wir werden sie ersetzen durch zwei Arten von stetiger Konvergenz. Erst beim Sonderfall $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) wollen wir in §§ 13–14 einige Untersuchungen über $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($z \in \mathfrak{G}_0$, $n \rightarrow \infty$) anstellen.

§10. Arten von stetiger Konvergenz

Mit $\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der z -Ebene bezeichnet; $f(z)$ sei eine komplexe Funktion, definiert für alle $z \in \mathfrak{G}$. CARATHÉODORY ([7], S. 58 und [9], S. 171 ff.) nennt dann eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger, für $z \in \mathfrak{G}$ erklärter komplexer Funktionen in $\mathfrak{G}$ *stetig konvergent* gegen $f(z)$, wenn für jede Folge $\{z_n\}$ ($z_n \in \mathfrak{G}$) mit $z_n \rightarrow z_0 \in \mathfrak{G}$ gilt: $f_n(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Im folgenden werden wir eine etwas allgemeinere Definition der stetigen Konvergenz benützen, die in einem Sonderfall ($\mathfrak{G} = \text{JORDAN-Gebiet}$) auf

COURANT ([10], S. 106) zurückzugehen scheint und die gegenüber der Definition von CARATHÉODORY einerseits Punkte z_n zuläßt, die nicht in $\mathfrak{G}$ liegen, andererseits aber auch nicht von $f_n(z)$ verlangt, in ganz $\mathfrak{G}$ definiert zu sein.

Definition 1 (Stetige Konvergenz). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \rightarrow z_0$ gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Diese Definition weist noch einen wichtigen Nachteil auf. Schon in einfachsten Fällen, wo $\{f_n\} = f, f, f, \dots$ ist, liegt im allgemeinen keine stetige Konvergenz im Sinn der Definition 1 vor. Man nehme z.B. $f_n(z) = f(z) =$ Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ und $z_n \rightarrow z_0$ abwechselnd auf verschiedenen Seiten des Einschnitts in $|z| < 1$ (Fig. 7). Ersichtlich divergiert $\{f_n(z_n)\}$.

Diese Möglichkeit schließen wir aus, indem wir nur $z_n \in \mathfrak{G}$ zulassen und verlangen, daß $z_n \rightarrow z_0 \in \mathfrak{G}$ oder gegen ein Primende E von $\mathfrak{G}$ strebe. Neben Definition 1 benutzen wir also

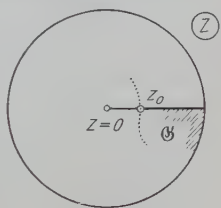


Fig. 7

Definition 2 (Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent im weiteren Sinne gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \mathfrak{G}$ [bzw. zu jedem Primende E von $\mathfrak{G}$] Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n \cap \mathfrak{G}$ und $z_n \rightarrow z_0$ [bzw. $z_n \rightarrow E$] gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \rightarrow f(z_0)$ [bzw. $f_n(z_n) \rightarrow f(E)$]²²⁾.

Es wird dabei also angenommen, daß $f(z)$ für $z \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt ist und auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist.

Wir bemerken noch, daß in unseren Anwendungen $f(z)$ die Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ darstellt, so daß also $f(z)$ auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist. In diesem Fall bestätigt man dann unschwer, daß eine in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig gegen $f(z)$ konvergente Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ dort sicher auch im weiteren Sinne stetig gegen $f(z)$ konvergiert.

§11. Ein Satz für stetige Konvergenz

Sind die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, \dots$) in der z -Ebene gegeben, so ist nun die Frage, unter welchen topologischen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$) die Abbildungsfunktionen $w=f_n(z)$ von $\mathfrak{G}_n$ auf $|w| < 1$ stetig gegen $w=f_0(z)$ konvergieren im Sinne unserer Definition 1. Es ist dabei keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, $\mathfrak{G}_0$ als beschränkt anzunehmen; andernfalls führe man zuerst $\mathfrak{G}_0$ durch eine einfache Abbildung in ein beschränktes Gebiet über.

Als entscheidend erweist sich die folgende

Bedingung (B₁). Die Punkte $z'_n, z''_n \in \mathfrak{G}_n$ konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z'_n und z''_n durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) vom Punkt $z=0$ zu trennen.

²²⁾ Bei WALSH ([32], S. 348) wird wieder eine andere Definition von „stetiger Konvergenz“ gegeben.

Sodann lautet unser

Satz 11 (Stetige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) der z -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abgebildet; $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und besitze nur einfache Primenden.

Dann ist die Bedingung (B_1) zusammen mit $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ in $\overline{\mathfrak{G}_0}$ stetig gegen $f_0(z)$ konvergiert.

Vorbemerkungen. a) Die Forderung an $\mathfrak{G}_0$, nur einfache Primenden zu besitzen, ist natürlich. Sonst kann man ja von $f_0(z)$ gar nicht reden, wenn $z_0 \in R_0$ liegt, und Definition 1 wäre nicht anwendbar. Hervorgehoben sei, daß $\mathfrak{G}_0$ wohl nicht punktförmige Primenden E besitzen kann; für $z_0 \in E$ ist dann $f_0(z_0) = f_0(E)$ zu setzen.

b) Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ brauchen nicht beschränkt oder gleichmäßig beschränkt zu sein, wenn (B_1) und $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) erfüllt sind, im Gegensatz zu § 4,

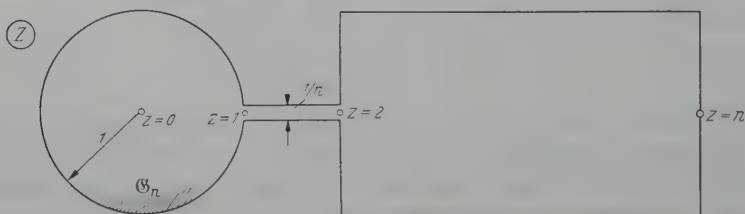


Fig. 8

wo die Bedingungen (4.1) und (4.2) die gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ nach sich ziehen. Im beigezeichneten Beispiel ist $\mathfrak{G}_0$ der Kreis $|z| < 1$.

c) Man wird sich fragen, ob in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht ersetzt werden kann durch die folgende einfachere: „Die Punkte z'_n konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z'_n durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) vom Punkt $z=0$ zu trennen.“

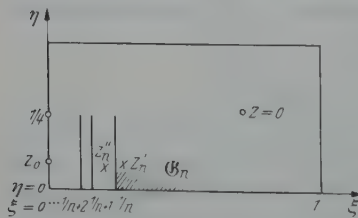


Fig. 9

Dies ist nicht der Fall, wie das Beispiel der Fig. 9 zeigt; $\mathfrak{G}_n$ ist dabei ein mit Einschnitten versehenes Rechteck, $\mathfrak{G}_0$ dieses Rechteck selbst. Hier ist nun die eben genannte einfachere Bedingung erfüllt, wie man sieht. Nicht erfüllt ist jedoch die Bedingung (B_1) von Satz 11 (vgl. z. B. die Punkte z'_n, z''_n), und da dieselbe notwendig ist für das Bestehen von Satz 11, sehen wir hiermit, daß (B_1) nicht durch die oben genannte einfachere Bedingung ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt für den folgenden Satz 12.

Beweis von Satz 11. A) Die Bedingungen sind notwendig.

(i) $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$). Zunächst ist zu sagen: $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_n) \neq 0$. Sonst gäbe es eine Punktfolge $z_n \rightarrow 0$ derart, daß $|f_n(z_n)| \rightarrow 1$ strebt für eine Indexfolge $n = n_k$.

wegen $f_0(0)=0$ ist. Weiter behaupten wir nun: $\{f_n(z)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\Re(\mathfrak{G}_n)$. Denn dies gilt zunächst für eine Nullpunktsumgebung U in $\Re(\mathfrak{G}_n)$, die zu $\mathfrak{G}_0$ gehört wegen $O \in \mathfrak{G}_0$. Andernfalls gäbe es eine Folge $\{z_n\}$ und einen Punkt z_0 mit $z_0, z_n \in U$, $z_n \rightarrow z_0$ so, daß $|f_n(z_n) - f_0(z_0)| \geq \alpha > 0$ ist für beliebig hohe Indizes n , im Widerspruch zur Annahme. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\Re(\mathfrak{G}_n)$ ist nun eine Folge des Satzes von VITALI (es ist ja $|f_n(z)| \leq 1$ für $z \in \mathfrak{G}_n$), und die Grenzfunktion muß nach WEIERSTRASS mit $f_0(z)$ identisch sein. Nach Satz B ist also $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$).

(ii) Die Bedingung (B_1) ist erfüllt. Wir nehmen also an, es sei

$$f_n(z'_n) \rightarrow f_0(z_0) \quad f_n(z''_n) \rightarrow f_0(z_0) \quad z'_n, z''_n \rightarrow z_0 \in R_0; \quad z'_n, z''_n \in \mathfrak{G}_n,$$

und wir müssen zeigen, daß z'_n, z''_n durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \rightarrow 0$ vom Punkt $z=0$ zu trennen sind.

Haben die $\mathfrak{G}_n$ Flächen $A_n \leq A < \infty$, so ist dieser Nachweis einfach. Ist nämlich $\delta_n = \max(|f_n(z'_n) - f_0(z_0)|, |f_n(z''_n) - f_0(z_0)|)$, so gibt es nach Hilfssatz 1 einen Radius ϱ_n in $(\delta_n, \frac{1}{2}\delta_n)$ derart, daß das Bild von $k(\varrho_n)$ um den Punkt $f_0(z_0)$ in $\mathfrak{G}_n$ einen Durchmesser hat, der $\leq \left(\frac{2\pi A}{\log \frac{1}{\delta_n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_n$ ist. Nun trennt aber $k(\varrho_n)$ die

Punkte $f_n(z'_n)$ und $f_n(z''_n)$ von $w=0$, also trennt sein Bild die Punkte z'_n und z''_n von $z=0$.

Im allgemeinen Fall müssen wir unseren Beweis modifizieren. Wir wählen folgende Größen. $\mathfrak{G}_0$ sei in $|z| < M$ gelegen, $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und nun $r < 1$ so klein gewählt, daß $\left(\frac{8\pi^2 M^2}{\log \frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Sodann wählen wir $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ so klein,

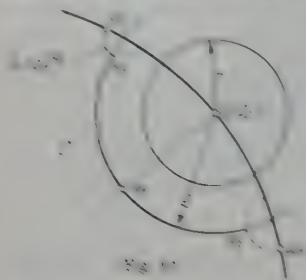
daß das Bild jedes Querschnitts in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< \delta$ in der w -Ebene einen Durchmesser $< \frac{r}{3}$ hat, unabhängig von n . Das läßt sich einrichten:

Ist nämlich δ genügend klein, so läßt sich der Querschnitt in einen Kreis von beliebig kleinem Radius und Mittelpunkt auf R_n (Rand von $\mathfrak{G}_n$) einschließen; dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{G}_n$ hat aber, wie man mit Hilfssatz 2 (ii) sieht, in der w -Ebene ein Bild von beliebig kleinem Durchmesser, also auch die Teilmenge, die von unserem Querschnitt herrührte. Schließlich wählen wir noch n_0 so, daß $(\alpha) |f_n(z'_n) - f_0(z_0)| < \frac{r}{2}$ und $(\beta) |f_n(z''_n) - f_0(z_0)| < \frac{r}{2}$ ist für $n \geq n_0$, und $(\beta) n_0 \geq n_0(\delta)$ des Hilfssatzes 5.

Solche unter den $\mathfrak{G}_n$ ($n \geq n_0$), die Punkte in $|z| \geq 2M$ haben, operieren wir wie folgt. $\mathfrak{G}_n$ sei ein solches Gebiet, P_1 ein Punkt in $|z| \geq 2M$. Nach dem Hilfssatz 5 läßt sich ein geradliniger δ -Querschnitt $q_n^{(1)}$ in $\mathfrak{G}_n$ finden, der in der δ -Umgebung von R_0 verläuft und P_1 von $z=0$ trennt; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(1)}$. Besitzt $\mathfrak{G}_n^{(1)}$ noch einen Punkt P_2 in $|z| \geq 2M$, so trenne man ihn durch $q_n^{(2)}$ ab, also durch einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, der wieder in der δ -Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$ verläuft; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(2)}$. Und so fort, man erhält eine höchstens

abzählbare Folge von Teilgebieten $\mathfrak{G}_n^{(v)}$ von $\mathfrak{G}_n$, die sich auch überschneiden dürfen. Der völlig in $|z| \leq 2M$ gelegene Durchschnitt $\cap_v \mathfrak{G}_n^{(v)}$ werde durch $w = f_0(z)$ auf die Teilmenge $\mathfrak{M}_n$ von $|w| < 1$ abgebildet.

Nun schlagen wir den durch Hilfssatz 3 (ii) für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ und unser gewähltes ϵ bestimmten Kreis $k(\varrho) = k(\varrho_n)$ um $w = f_0(z_0)$. Da alle unsere Abschritte nach Konstruktion in $|w| > 1 - \frac{\epsilon}{5}$ liegen, hat $k(\varrho)$ mit $\mathfrak{M}_n$ innere Punkte gemeinsam z. B. den Punkt $w_1 = (1 - \varrho) f_0(z_0)$. Laufen wir von w_1 aus nach beiden Seiten, so seien w_2, w_3 die beiden ersten Punkte, die nicht mehr innere Punkte von $\mathfrak{M}_n$ sind, d. h. sie liegen entweder auf $|w| = 1$ oder



sind Häufungspunkte von Punkten auf den $f_n(q_n^{(v)})$ ($v = 1, 2, \dots$). Im letzteren Fall verbinden wir w_2 (bzw. w_3) mit einem Punkt auf $f_n(q_n^{(v)})$ [bzw. $f_n(q_n^{(u)})$] durch ein beliebig kurzes Geradenstück, dessen Bild in der z -Ebene ein analytisches Kurvenstück der Länge $< \frac{\epsilon}{8}$ sein möge, und verfolgen dann $f_n(q_n^{(v)})$ und $f_n(q_n^{(u)})$ bis auf $|w| = 1$. Der damit konstruierte Kurvenzug $C = C_n: w_1, w_3, w_1, w_2, w_2$ trennt sicher $f_n(z'_n)$ und $f_n(z''_n)$ von $w = 0$, da ja z. B.

$|f_n(z'_n) - f_0(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ ist und die Kurven $f_n(q_n^{(v)}), f_n(q_n^{(u)})$ höchstens einen Durchmesser $\frac{\epsilon}{3}$ haben. Also trennt das Bild von C in der z -Ebene die Punkte z'_n, z''_n von $z = z_0$; dieses Bild hat aber, wie man mit Hilfssatz 3 (ii) sieht, einen Durchmesser

$$< \delta + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + \delta < \epsilon$$

und bildet einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, was zu zeigen war. (Wenn $\mathfrak{G}_n$ keine Punkte in $|z| \geq 2M$ hat, braucht es nicht operiert zu werden; $\mathfrak{M}_n$ ist dann einfach $|w| < 1$.)

B. Die Bedingungen sind hinreichend. Mit Rücksicht auf Satz B müssen wir zeigen: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \rightarrow z_0 \in R_0$ folgt $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$). Zunächst bemerken wir:

(11.1) Es gibt eine Folge $z'_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z'_n \rightarrow z_0$ so, daß $f_n(z'_n) \rightarrow f_0(z_0)$.

Zu diesem Zweck wählen wir eine Folge $\{\bar{z}_k\}$ von Punkten aus $\mathfrak{G}_0$ mit $\bar{z}_k \rightarrow z_0$; für diese gilt dann (Voraussetzung einfacher Primenden!) $f_0(\bar{z}_k) \rightarrow f_0(z_0)$, und es sei $\{\epsilon_k\}$ eine beliebige Nullfolge. Infolge Satz B gibt es für $k=1$, d. h. festes $\bar{z}_1, \bar{z}_1$ einen Index n_1 derart, daß $f_n(\bar{z}_1)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_1) - f_0(\bar{z}_1)| < \epsilon_1$ für $n \geq n_1$. Aus denselben Gründen gibt es allgemein für den Index k , d. h. festes $\bar{z}_k, \bar{z}_k$ einen Index $n_k > n_{k-1}$ derart, daß $f_n(\bar{z}_k)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_k) - f_0(\bar{z}_k)| < \epsilon_k$ für $n \geq n_k$. Wir setzen nun

$$z_n = 0 \quad (n < n_1),$$

$$z_n = \bar{z}_1 \quad (n_1 \leq n < n_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_n = \bar{z}_k \quad (n_k \leq n < n_{k+1}).$$

Dann haben wir für diese Folge $z'_n \rightarrow z_0$ und

$$|f_n(z'_n) - f_0(z_0)| \leq |f_n(z'_n) - f_0(\bar{z}_k)| + |f_0(\bar{z}_k) - f_0(z_0)| < \varepsilon_k + \varepsilon$$

$$(n_k \leq n < n_{k+1}, \quad k \geq k_0),$$

also gilt (11.4).

Nun kommen wir wieder auf unsere beliebige Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \rightarrow z_0$ zurück. Nach Voraussetzung (B_1) kann man z_n, z'_n durch einen ε_n -Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ von $z=0$ trennen, und man erkennt sofort mit Hilfssatz 2, daß es ein q_n in $(\varepsilon_n, |\varepsilon_n|)$ gibt, für das das Bild von $\sum_i k_i(q_n)$ eine Menge von Querschnitten in $|w| < 1$ vom Gesamtdurchmesser $< \frac{2\pi}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \delta_n$

ist ($\delta_n \rightarrow 0$); insbesondere hat also das Bild von q_n einen Durchmesser $\leq \delta_n$. Nun werden z_n, z'_n durch q_n von $z=0$ getrennt, also $f_n(z_n), f_n(z'_n)$ durch das Bild von q_n in der w -Ebene von $w=0$, d.h. $f_n(z_n)$ und $f_n(z'_n)$ gehören einer δ_n -Umgebung an. Aus $f_n(z'_n) \rightarrow f_0(z_0)$ folgt daher $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$, und dies war zu zeigen.

Zusätze. Wir wollen noch hervorheben, daß wir zugleich folgenden Satz bewiesen haben, in dem Aussage und Voraussetzung lokal sind.

Zusatz 1. Für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) von Satz 11 gelte $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ an einer Stelle $z_0 \in R_0$ genau dann stetig gegen $f_0(z)$ [d.h. aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \rightarrow z_0$ folgt $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$], wenn die Bedingung (B_1) an der Stelle z_0 erfüllt ist.

Ferner wollen wir noch die Beziehung zu dem folgenden Satz von COURANT ([10], S. 108) herstellen.

Zusatz 2 (JORDAN-Gebiete). Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) von Satz 11 seien JORDAN-Gebiete. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ sicher dann stetig in $\overline{\mathfrak{G}_0}$ gegen $f_0(z)$, wenn die Bedingungen von Satz C (§ 7) erfüllt sind.

Beweis. Es genügt, anzunehmen, es sei $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \rightarrow z_0 \in R_0$; $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ konvergiere gegen ein $\bar{w}$ auf $|w|=1$. Nach Satz C gilt daher $f_{n_k}^{-1}(f_{n_k}(z_{n_k})) \rightarrow f_0^{-1}(\bar{w})$, also $z_0 = f_0^{-1}(\bar{w})$, d.h. wegen der Einfachheit der Primenden von $\mathfrak{G}_0$ sicher $\bar{w} = f_0(z_0)$, und der Grenzwert der Folge $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ war also unabhängig von $\{n_k\}$. Dies bedeutet $f_n(z_n) \rightarrow \bar{w} = f_0(z_0)$.

Indessen sei darauf hingewiesen, daß entgegen einer Bemerkung von COURANT ([11], S. 70) die Bedingung (i) von Satz C nicht notwendig ist für die Gültigkeit von Zusatz 2; man vergleiche dazu das Beispiel der Fig. 8.

§12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne

Nachdem in § 11 die Frage der stetigen Konvergenz erledigt worden ist, behandeln wir nun das analoge Problem, unter welchen Annahmen über die $\mathfrak{G}_n$ stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ im weiteren Sinne vorliegt. Von $\mathfrak{G}_0$ können wir dabei wieder Beschränktheit verlangen. Von Wichtigkeit ist im folgenden die

Bedingung (B_2) . Die Punkte $z'_n, z''_n \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ konvergieren gegen das Primende E des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z'_n und z''_n durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) vom Punkt $z=0$ zu trennen.

Unter Benützung dieser Bedingung lautet

Satz 12 (Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) der z -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abgebildet; $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt.

Dann ist die Bedingung (B_2) zusammen mit $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ in $\mathfrak{G}_0$ stetig im weiteren Sinne gegen $f_0(z)$ konvergiert.

Der Beweis von Satz 12 verläuft völlig parallel zum Beweis von Satz 11 und kann daher übergangen werden.

Bemerkungen. a) Daß Satz 12 weitergehend als Satz 11 sein kann, sieht man am Beispiel der Fig. 4. Die Bedingungen in Satz 12 sind dort erfüllt, jedoch nicht diejenigen in Satz 11. $\mathfrak{G}_0$ ist in diesem Falle ein mit einem Einschnitt versehenes Rechteck.

b) Die Bedingung (B_2) ist keine Folge von $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$), selbst dann nicht, wenn $\mathfrak{G}_n \not\subset \mathfrak{G}_0$; man betrachte dazu Fig. 9.

c) Schließlich gilt noch ein Analogon zu Zusatz 1 von Satz 11.

Zusatz. Für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ von Satz 12 gelte $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ am Primende E von $\mathfrak{G}_0$ genau dann stetig im weiteren Sinne gegen $f_0(z)$ [d. h. aus $z_n \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ mit $z_n \rightarrow E$ von $\mathfrak{G}_0$ folgt $f_n(z_n) \rightarrow f_0(E)$], wenn die Bedingung (B_2) am Primende E erfüllt ist.

An der Fig. 9 liest man sofort ab, daß dieser Zusatz anwendbar sein kann, ohne daß Satz 12 selbst anwendbar ist, da die Bedingung (B_2) nicht überall erfüllt ist.

§ 13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$

Nach den allgemeinen Sätzen 11 und 12 wollen wir nun die Verhältnisse genauer studieren für den Fall, daß $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ist ($n=1, 2, \dots$).

$\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$. Wir sahen bereits im Anschluß an Satz 12, daß dort selbst in diesem Sonderfall die Bedingung (B_2) nicht weggelassen werden kann; das dort angeführte Beispiel der Fig. 9 zeigt ferner, daß auch in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht aus $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ folgt. $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ bedeutet also für Satz 11 und Satz 12 keine Vereinfachung. Zu bemerken wäre höchstens, daß wegen $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ in der Beurteilung von $f_n(z_n)$ jetzt die z_n alle Punkte aus $\mathfrak{G}_n$ durchlaufen können.

$\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$. Hier bekommen wir jedoch eine beträchtliche Vereinfachung von Satz 12; es zeigt sich nämlich, daß die Bedingung (B_2) überflüssig ist.

Satz 13. Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) der z -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abgebildet. $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und es gelte $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$).

Ist ferner ζ_0 irgendein fester Punkt $\in g_{k+v_1} < g_k$, so läßt er sich mit P_2 in $\mathfrak{G}_0$ durch eine JORDAN-Kurve C_2 verbinden, die q_k nicht trifft; insbesondere ist

$$\min \{ \text{dist}(R_k, C_2), \text{dist}(Q_k, C_2) \} = d_2 > 0.$$

Nun schlagen wir um R_k und Q_k Kreise K_1, K_2 mit dem Radius

$$\varrho < \min \left(d, d_1, d_2, \frac{R_k Q_k}{2}, r_k \right),$$

was eine von n unabhängige Zahl ist. In diesen Kreisen, die fremd sind und $\overline{g_{k+v_1}}$, C_1 und C_2 nicht schneiden, finden sich Randpunkte $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ für $n > n_1$, da ja R_k, Q_k Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ sind und $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$. Zieht man die Geraden $R_k A_n^{(1)}, Q_k A_n^{(2)}$, so gibt es von R_k bzw. von Q_k aus gesehen erste Randpunkte $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$, wobei eventuell $R_k = B_n^{(1)}, Q_k = B_n^{(2)}$.

Wir stellen jetzt fest: (i) Der konstruierte Kurvenzug $B_n^{(1)}, R_k, q_k, Q_k, B_n^{(2)}$ ist ein Querschnitt $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< 2r_k + 2\varrho < 4r_k < 4\varepsilon$ ($n > n_1$). Diesem Querschnitt $\tilde{q}_n$ entspreche ein Abschnitt Δ_n von $\mathfrak{G}_n$. (ii) Es ist

$$(13.1) \quad g_{k+v_1} < \Delta_n \quad (n > n_1).$$

(i) ist klar; man beachte die Konstruktion und $q_k < \mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$.

(ii) Zunächst gehört unser Punkt ζ_0 zu g_{k+v_1} (nach Konstruktion), er gehört aber auch zu Δ_n . Die Punkte $P_1, P_2 \in \mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ liegen nämlich ersichtlich auf verschiedenen Seiten des Querschnitts $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$, und da C_1 den Punkt P_1 mit $z=0$ in $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ verbindet, ohne q_k und K_1, K_2 zu treffen (also ohne $\tilde{q}_n$ zu treffen), liegt $P_2 \in \Delta_n$ ($n > n_1$). Nun betrachten wir C_2 : Diese JORDAN-Kurve verbindet P_2 mit ζ_0 in $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$, ohne q_k zu treffen, und nach Wahl von n_1 kann C_2 auch die Strecken $R_k B_n^{(1)}$ und $Q_k B_n^{(2)}$ nicht treffen, d.h. C_2 verläuft in $\mathfrak{G}_n$ und trifft $\tilde{q}_n$ nicht, d.h. ζ_0 gehört zu Δ_n .

Ist weiter ζ_1 ein beliebiger Punkt aus g_{k+v_1} , so verbinden wir ihn mit ζ_0 in g_{k+v_1} durch eine JORDAN-Kurve C_3 . Läge ζ_1 nicht in Δ_n , so müßte C_3 den Rand von Δ_n schneiden. Dieser Rand besteht aus Teilen $R^{(1)}, R^{(2)}$, wobei $R^{(1)}$ zum Rand von $\mathfrak{G}_n$ gehört, $R^{(2)}$ aber nur innere Punkte von $\mathfrak{G}_n$ enthält, nämlich $R^{(2)} = \tilde{q}_n$. C_3 kann nun sicher nicht $R^{(1)}$ schneiden, da ja $C_3 < g_{k+v_1} < \mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$, und ferner kann C_3 nicht den in $K_1 \cup K_2$ gelegenen Teil von $R^{(2)}$ schneiden, da nach Konstruktion $K_1 \cap \overline{g_{k+v_1}} = K_2 \cap \overline{g_{k+v_1}} = 0$ ist. Also müßte C_3 den Weg q_k schneiden, d.h. es gäbe auf q_k innere Punkte von g_{k+v_1} ; dies ist wegen $g_{k+v_1} < g_k$ unmöglich.

Also liegt ζ_1 in Δ_n , d.h. es gilt (13.1). Da nun aber z'_n, z''_n gegen E streben, so gilt $z'_n, z''_n \in g_{k+v_1}$ ($n > n_2$) und daher $z'_n, z''_n \in \Delta_n$ ($n > \bar{n}$), d.h.

$$(13.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z'_n, z''_n \text{ werden für } n > \bar{n} \text{ durch den Querschnitt } \tilde{q}_n \text{ in } \mathfrak{G}_n \text{ vom Durch-} \\ \text{messer } < 4\varepsilon \text{ von } z=0 \text{ getrennt,} \end{array} \right.$$

was zu zeigen war.

Fall B. E hat keinen erreichbaren Randpunkt. Wir schlagen um einen Hauptpunkt z_0 von E Querschnitte q_k , die auf $|z - z_0| = r_k$ gelegen sind ($r_k \rightarrow 0$), und die E definieren. Dann kann der Fall A_1 nicht eintreten. Denn sonst bestünde E aus dem Punkt z_0 , der dann natürlich erreichbar wäre.

Wir gehen daher gemäß Fall A_2 vor, zeichnen q_k, R_k, Q_k . Wieder gibt es ein r_0 der dort besprochenen Art; andernfalls wäre entweder R_k oder Q_k erreichbarer Randpunkt von E , im Widerspruch zu unserer jetzigen Annahme. Die übrige Konstruktion bleibt unverändert, man erhält also auch im Fall B das Resultat (13.2).

Damit ist gezeigt, daß bei $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ die Bedingung (B_2) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ist, und Satz 13 ist bewiesen.

§14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$

I. Aus dem eben bewiesenen Satz 13 läßt sich nachstehendes Ergebnis folgern, das die stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ betrifft, wenn hierbei nur Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ in Betracht gezogen werden.

Zusatz 1. *Voraussetzung:* Wie in Satz 13; $\mathfrak{G}_0$ besitze nur einfache Primenden.

Behauptung: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \rightarrow z_0 \in \overline{\mathfrak{G}_0}$ folgt stets $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$ genau dann, wenn $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$).

Hierin ist unter $f_0(z_0)$ der Punkt $f_0(E)$ zu verstehen, wenn z_0 einem Primende E von $\mathfrak{G}_0$ angehört. Der Beweis des Zusatzes folgt unmittelbar aus Satz 13, wenn man beachtet, daß $z_n \rightarrow z_0 \in \text{Rand von } \mathfrak{G}_0$ im Falle einfacher Primenden impliziert: $z_n \rightarrow E$ ($n \rightarrow \infty$).

Man wird sich natürlich fragen, ob in Zusatz 1 die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ nicht einfach weggelassen werden kann. Das würde bedeuten, daß in Satz 11 die Bedingung (B_1) überflüssig ist, wenn $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ ist, so wie das ja bei Satz 12 der Fall war. Indessen ist dieser Analogieschluß falsch, denn es gilt

Zusatz 2. *Die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ kann in Zusatz 1 nicht weggelassen werden.*

Dies zeigt das Beispiel der Fig. 12, in dem sogar $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$; $\mathfrak{G}_0$ ist hier das Kreisgebiet $|z| < 1$. Hier ist nämlich für die angedeuteten Punkte z'_n, z''_n die Bedingung (B_1) von Satz 11 nicht erfüllt, weshalb aus dessen Aussage falsch ist.

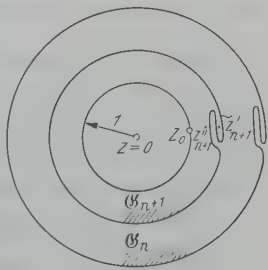


Fig. 12

Die Forderung $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ gab also nur im Falle der stetigen Konvergenz im weiteren Sinne eine Vereinfachung, weil eben dort die Folge $\{f_n(z_n)\}$ nur für Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ untersucht wird.

Schließlich folgt aus Satz 13 noch die folgende wichtige Aussage bezüglich gleichmäßiger Konvergenz der $f_n(z)$ in $\mathfrak{G}_0$.

Satz 14 (Gleichmäßige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) der z -Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abgebildet. $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und es gelte $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$).

Dann ist $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ in $\mathfrak{G}_0$ gleichmäßig gegen $f_0(z)$ konvergiert²³.

Vorbemerkung. Ein etwas schwächerer Satz stammt von FARRELL ([12], S. 573)²⁴; dort wurde aber zusätzlich verlangt:

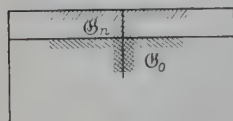


Fig. 13

a) $\mathfrak{G}_0$ habe nur einfache Primenden; der FARRELLsche Satz wäre also im Beispiel der Fig. 13 nicht anwendbar.

b) $\mathfrak{G}_0$ besitzt einen Rand, der auch Rand eines einfach zusammenhängenden unendlichen Gebiets ist; dies wäre ebenfalls bei unserem Beispiel nicht erfüllt.

c) $\mathfrak{G}_n$ sind gleichmäßig beschränkt; diese Voraussetzung war beweistechnisch bedingt, da FARRELL mit älteren LINDELÖFSchen Sätzen operierte statt mit dem FERRANDSchen Satz, wie das hier geschah.

Beweis von Satz 14. $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ist notwendig (Satz B). Wenn andererseits $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ erfüllt ist, die Aussage aber falsch wäre, so gäbe es eine Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_0$ so, daß $|f_n(z_n) - f_0(z_n)| \geq 2\alpha > 0$ ist. Die z_n streben dabei (wieder wegen Satz B) gegen den Rand von $\mathfrak{G}_0$, und es sei angenommen, daß $\{z_n\}$ gegen das Primende E von $\mathfrak{G}_0$ konvergiere. Dann ist aber $f_0(z_n) \rightarrow f_0(E)$, es wäre also $|f_n(z_n) - f_0(E)| \geq \alpha > 0$, obwohl $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \rightarrow E$ gilt; dies wäre im Widerspruch zu Satz 13.

II. Manchmal ist es zweckmäßig, über das Verhalten der Funktionen $g_n(z)$ Bescheid zu wissen, die $\mathfrak{G}_n$ auf den Kern $\mathfrak{G}_0$ der Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ abbilden. In dieser Richtung wollen wir abschließend noch folgende Verallgemeinerung eines Satzes von WALSH ([32], S. 35, Corollary 1) beweisen.

Satz 15 (Abbildung auf den Kern). Vorgegeben sei eine Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) einfach zusammenhängender und endlicher Gebiete mit $O \in \mathfrak{G}_n$, für die $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_0$ ($n \rightarrow \infty$) und $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \dots$) gelte; $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte. Die $\mathfrak{G}_n$ seien vermöge der Funktionen $g_n(z)$ konform und normiert auf $\mathfrak{G}_0$ abgebildet.

Dann konvergiert $\{g_n(z)\}$ gleichmäßig in $\mathfrak{G}_0$ gegen $g_0(z) = z$.

Beweis. Die Funktionen $w = \varphi_n(z)$ [Umkehrfunktionen $z = \psi_n(w)$] mögen $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w| < 1$ abbilden. Dann ist $g_n(z) = \psi_0(\varphi_n(z))$

²³) Wir behaupten absichtlich nicht die gleichmäßige Konvergenz in $\overline{\mathfrak{G}_0}$, um die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß $\mathfrak{G}_0$ mehrfache Primenden besitzt.

²⁴) Ein noch spezielleres Resultat findet sich bei WALSH ([32], S. 32). Dieser Satz ist bekanntlich der Schlüssel zu wichtigen Sätzen aus der Theorie der Approximation im Komplexen.

($n=1, 2, \dots$), worin infolge von Satz 14 $\varphi_n(z) \Rightarrow \varphi_0(z)$ strebt ($n \rightarrow \infty, z \in \mathfrak{G}_0$). Die Abbildung $\psi_0(w)$ ist aber stetig in $|w| \leq 1$, woraus die Behauptung sofort folgt.

Bei WALSH ist neben anderen Voraussetzungen $\mathfrak{G}_0$ ein JORDAN-Gebiet und die $\mathfrak{G}_n$ müssen gleichmäßig beschränkt sein.

Literatur

- [1] BIEBERBACH, L.: Über einen Satz des Herrn CARATHÉODORY. Göttinger Nachr. **1913**, 552—560. — [2] BIEBERBACH, L.: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rend. Circ. Mat. Palermo **38**, 98—112 (1914). — [3] BIEBERBACH, L.: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., math.-phys. Kl. **1924**, 181—188. — [4] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [5] CARATHÉODORY, C.: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. **72**, 107—144 (1912). — [6] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913). — [7] CARATHÉODORY, C.: Conformal representation. Cambridge 1932. — [8] CARATHÉODORY, C.: Reelle Funktionen, Bd. I. Leipzig u. Berlin 1939. — [9] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I. Basel 1950. — [10] COURANT, R.: Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung. Göttinger Nachr. **1914**, 101—109. — [11] COURANT, R.: Bemerkung zu meiner Note: „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung.“ Göttinger Nachr. **1922**, 69—70. — [12] FARRELL, O. J.: On approximation to a mapping function by polynomials. Amer. J. Math. **54**, 571—578 (1932). — [13] FERRAND, J.: Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. math. France **70**, 143—174 (1942). — [14] FERRAND, J.: Sur la déformation analytique d'un domaine. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 132—134 (1945). — [15] FRÉCHET, M.: Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 435—449 (1905). — [16] GARNIER, R.: Sur la variation de la représentation conforme d'un domaine variable. Rend. di Mat. Roma **1954**, 258—267. — [17] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines généraux. Paris 1949. — [18] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers. Paris 1949. — [19] JULIA, G.: Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme. Ann. sci. Écol. norm. sup. (3) **39**, 1—28 (1922). — [20] LAVRENTIEFF, M., u. D. KWESSELAWA: Über einen OSTROWSKISchen Satz. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR **1**, 171—174 (1940). — [21] LELONG-FERRAND, J.: Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable. J. Math. pur. appl. (9) **31**, 103—126, 245—252 (1952). — [22] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 3¹, S. 177—377. 1909—1921. — [23] MARCHENKO, A.: Sur la représentation conforme. Doklady Acad. Sci. USSR **1**, 289—290 (1935). — [24] MARKOUCHEVITCH, A.: Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables. Mat. Sbornik (2) **1**, 863—884 (1936). — [25] MÜLLER, M.: Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete. Math. Z. **43**, 628—636 (1938). — [26] OSTROWSKI, A.: Über konforme Abbildungen annähernd kreisförmiger Gebiete. Jber. Dtsch. Math.-Verein. **39**, 78—81 (1930). — [27] OSTROWSKI, A.: Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung. Prace mat.-fiz. **44**, 371—471 (1936). — [28] RADÓ, T.: Sur la représentation conforme de domaines variables. Acta Sci. Math. Szeged **1**, 180—186 (1922/23). — [29] SPECHT, E. J.: Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 183—196 (1954). — [30] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1950. — [31] TSUJII, M.: On the theorems of CARATHÉODORY and LINDELÖF in the theory of conformal representation. Japanese J. Math. **7**, 91—90 (1930). — [32] WALSH, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [33] WALSH, J. L., u. D. GAIER: Zur Methode der variablen

Gebiete bei der Randverzerrung. Arch. der Math. **6**, 77—86 (1955). — [34] WARSCHAWSKI, S. E.: Über einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung. Göttinger Nachr. **1930**, 344—369. — [35] WARSCHAWSKI, S. E.: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Z. **35**, 321—456 (1932). — [36] WARSCHAWSKI, S. E.: On the degree of variation in conformal mapping of variable regions. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 335—356 (1950). — [37] WARSCHAWSKI, S. E.: On conformal mapping of nearly circular regions. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 562—574 (1950). — [38] WARSCHAWSKI, S. E.: Construction and applications of conformal maps. Washington 1952. — [39] WARSCHAWSKI, S. E.: On mean convergence in conformal mapping. Arch. der Math. **6**, 102—114 (1955). — [40] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme. Proc. Akad. Amsterdam **33**, 96—97 (1930). — [41] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme des bandes. Compositio math. **1**, 217—222 (1934). — [42] ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warschau 1935.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 2. Juli 1955)

Arithmetic properties of elliptic functions

By

LEONARD CARLITZ

1. *Introduction.* Put [5, p. 399]

$$(1.1) \quad \operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

where $u = k^2$ in the usual notation; then $A_{2m+1}(u)$ is a polynomial in u with integral coefficients. Also put

$$(1.2) \quad \frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

where $\beta_{2m}(u)$ is a polynomial with rational coefficients. The writer proved in [2] that the polynomials $A_n(u)$ satisfy

$$(1.3) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)t/(p-1)} A_{n+st} \equiv 0 \pmod{(p^n, p^{er})},$$

where p is an odd prime; $p^{e-1}(p-1) \mid t$ and r is an arbitrary integer ≥ 1 . This result is to be interpreted in the following way: after expansion each coefficient in the left member $\equiv 0$.

As for the polynomial $\beta_{2m}(u)$ we have

$$(1.4) \quad p\beta_{2m}(u) \equiv \begin{cases} -A_p^{2m/(p-1)}(u) & (p-1 \mid m) \\ 0 & (\text{otherwise}); \end{cases}$$

the modulus is p . Also corresponding to (1.3) we have

$$(1.5) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)t/(p-1)} \beta_{2m+st} \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})},$$

provided now that $p-1 \nmid 2m$. We shall refer to (1.3) and (1.5) as Kummer's congruences; (1.4) is of course an analogue of the Staudt-Clausen Theorem. We may also mention the result

$$(1.6) \quad \beta_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r},$$

provided $p^r \mid 2m$, $p-1 \nmid 2m$.

In the present paper we show that results like the above can be proved very rapidly by making use of the Fourier expansions for the Jacobi elliptic functions. (For a somewhat similar application see [1].) We find that the formulas in question can be referred back to corresponding properties of the

Bernoulli and Euler numbers. Indeed in this way we also get some new results. In particular we state

$$(1.7) \quad \beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r},$$

where now $p^r(p-1) \mid 2m$. This, like (1.6), is the analogue of a known property of the Bernoulli numbers.

It may be of interest to recall that Hurwitz in his paper [7] on the coefficients of the lemniscate function remarks that he was unable to carry over the usual proofs of the Staudt-Clausen Theorem because the necessary explicit formulas were not available. From the point of view of the present paper it appears that it is quite possible to carry over the usual proofs provided one considers the general function $\text{sn}(x, u)$ with u arbitrary rather than the special lemniscate function.

2. *Some preliminaries.* We consider power series of the form

$$(2.1) \quad f(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f_m(u),$$

where

$$(2.2) \quad f_m(u) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{ms} u^s,$$

and the coefficients a_{ms} are rational integers; a little more generally it suffices to assume that the a_{ms} are integral $\pmod{p}$, where p is a fixed odd prime. We may think of the series (2.1) and (2.2) as formal power series or if we prefer as series converging for $|x|$ and $|u|$ sufficiently small.

Now consider the transformation

$$(2.3) \quad u = \sum_{r=1}^{\infty} c_r v^r \quad (c_1 = 1),$$

where the c_r are integral $\pmod{p}$. Substituting from (2.3) in (2.2) we get

$$(2.4) \quad f_m(u) = h_m(v) = \sum_{s=0}^{\infty} a'_{ms} v^s.$$

It is immediate that the a'_{ms} are also integral. Since (2.3) implies

$$(2.5) \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n u^n$$

with integral c'_n , we may accordingly state

LEMMA 1. *Let the transformation (2.3) carry $f_m(u)$ into $g_m(v)$. Then the coefficients a_{ms} are integral if and only if the a'_{ms} are integral.*

In the next place assume that $f_m(u)$ satisfies

$$(2.6) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} f^{(r-s)t/(p-1)}_{m+st} \equiv 0 \pmod{p^m, p^{er}},$$

where $p^{e-1}(p-1) \mid t$, $r \geq 1$, and $f_m = f_m(u)$.

LEMMA 2. Let the transformation (2.3) carry $f_m(u)$ into $h_m(v)$ and $f(u)$ into $h(u)$. Then $f_m(u)$ satisfies (2.6) if and only if $h_m(v)$ satisfies a similar congruence.

This result is an immediate consequence of Lemma 1.

LEMMA 3. Let $f_m(u)$ satisfy (2.6) and let $f(u) \equiv \bar{f}(u) \pmod{p}$. Then

$$(2.7) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \bar{f}^{(r-s)} t^{s/(p-1)} f_{m+s} t = 0 \pmod{p^m, p^e}.$$

It follows from $f = \bar{f} \pmod{p}$ that $f^w = \bar{f}^w + p^e \varphi$, where $t = w(p-1)$ and φ has integral coefficients. Using symbolic notation, the left member of (2.7) is equal to

$$f^m (t - \bar{f}^w)^r = f^m (t - f^w + p^e \varphi)^r = f^m \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (t - f)^s (p^e \varphi)^{r-s},$$

and the lemma follows.

If we take $t = p-1$, $e = 1$, (2.6) becomes

$$(2.8) \quad f_{m+p-1}(u) \equiv f(u) f_m(u) \pmod{p} \quad (m \geq 1),$$

which implies the following

LEMMA 4. If $f_m(u)$ satisfies (2.6) and $f_1(u) = 1$ then

$$(2.9) \quad f_p(u) \equiv f(u) \pmod{p}.$$

3. The coefficients of $\text{sn } x$. For the application the transformation (2.3) will be the familiar expression for k^2 in terms of q :

$$(3.1) \quad k^2 = 16q \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^{2n}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8;$$

the coefficient 16 is of no consequence.

Now consider the expansion (see for example [8, p. 511])

$$\text{sn} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \sin(2n+1)x}{1 - q^{2n+1}}.$$

Since $2K/\pi = \vartheta_3^2$, we have

$$(3.2) \quad \begin{cases} \text{sn } x = \frac{4}{k \vartheta_3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{((2n+1)x/\vartheta_3^2)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ \quad = \frac{4}{k \vartheta_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{x}{\vartheta_3^2} \right)^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m+1} q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}}. \end{cases}$$

Comparing (3.2) with (2.1) and (2.4), we put

$$(3.3) \quad f_{2m+1}(k^2) = h_{2m+1}(q) = (-1)^m \frac{4}{k} \vartheta_3^{-2(2m+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m+1} q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}}.$$

Since $\vartheta_3 = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2}$, it is clear from (3.1) that $h_{2m+1}(q)$ is a series in q with integral coefficients. Also it is evident from (3.3) that

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s+t} \binom{r}{s} \vartheta_3^{2st} h_{2m+1+s} \\ = (-1)^m \frac{4}{k} \vartheta_3^{-2(2m+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} (2n+1)^m ((2n+1)^t - 1)^r. \end{aligned}$$

Now when $p^{e-1}(p-1) \nmid t$, $p \nmid (2n+1)$, we have $(2n+1)^t \equiv 1 \pmod{p^e}$. Hence we get

$$(3.4) \quad h^{2m+1} (h^t - (-1)^{t/2} \vartheta_3^{-2t})^r \equiv 0 \pmod{(p^m, p^{er})}.$$

We now apply Lemma 2 and Lemma 4. Comparing (3.3) with (1.1) we have

$$f_{2m+1}(u) = A_{2m+1}(u).$$

Since $A_1(u) = 1$, it therefore follows that (2.6) becomes

$$(3.5) \quad A^{2m+1}(A^t - A_p^w)^r = 0 \pmod{(p^{2m+1}, p^{er})},$$

where as above $(t = p-1)^w$, $p^{e-1}(p-1) \nmid t$ and $A_n = A_n(u)$. We have therefore proved (1.3). Note also for later use that (2.9) reduces to

$$(3.6) \quad A_p(k^2) \equiv (-1)^{(p-1)/2} \vartheta_3^{-2(p-1)} \pmod{p}.$$

Since [2, § 6]

$$A_p(u) \equiv (-1)^{(p-1)/2} \sum_{s=0}^x \binom{x}{s}^2 u^s \pmod{p},$$

where $p = 2x+1$, (3.6) implies the following congruence

$$(3.7) \quad \vartheta_3^{2(p-1)} \sum_{s=0}^x \binom{x}{s}^2 k^{2s} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Substituting for k^2 from (3.4), (3.7) becomes an identical congruence in q .

4. *The coefficients of $\operatorname{cn} x$ and $\operatorname{dn} x$.* We put

$$(4.1) \quad \operatorname{cn} x = \operatorname{cn}(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

On the other hand we have [8, p. 511]

$$\operatorname{cn} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}} \cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}},$$

which implies

$$\begin{aligned}\operatorname{cn} x &= \frac{4}{k \vartheta_3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{((2n+1)x/\vartheta_3^2)^{2m}}{(2m)!} \\ &= \frac{4}{k \vartheta_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{x}{\vartheta_3^2}\right)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m} q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}},\end{aligned}$$

so that now

$$f_{2m}(k^2) = h_{2m}(q) = (-1)^m \frac{4}{k} \vartheta_3^{-2(2m+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m} q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}.$$

Thus exactly as above we get

$$h^{2m}(h^t - (-1)^{t/2} \vartheta_3^{-2t})^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}.$$

Finally by Lemma 2 and (3.6) we get

$$(4.2) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)w} C_{2m+st} \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})},$$

where $C_n = C_n(u)$. Thus the coefficients in (4.1) satisfy a congruence similar to that satisfied by the coefficients of $\operatorname{sn} x$; note however the presence of A_p in the left member of (4.2).

For the function $\operatorname{dn} x$ we put

$$(4.3) \quad \operatorname{dn} x = \sum_{m=0}^{\infty} D_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

and recall the expansion [8, p. 541]

$$(4.4) \quad \operatorname{dn} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos 2nx}{1+q^{2n}}.$$

Then exactly as in the proof of (4.2), (4.3) and (4.4) yield

$$(4.5) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)w} D_{2m+st} \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})},$$

where $D_n = D_n(u)$.

We remark that a glance at the Fourier expansions of $\operatorname{cd} x$, $\operatorname{sd} x$ and $\operatorname{nd} x$ show that their coefficients also satisfy similar congruences; the notation is that of Glaisher [8, p. 494]. For example if we put

$$\operatorname{cd} x = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{cd}_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

we find that

$$(4.6) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)w} \operatorname{cd}_{2m+st} \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}.$$

The functions dc , nc and sc are a little more interesting from this point of view and we return to them below.

5. *The reciprocal of $\operatorname{sn} x$.* We shall employ the notation (1.2). Also we have the expansion [8, p. 511]

$$\operatorname{ns} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K} \csc x + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1} \sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}$$

so that

$$(5.1) \quad \frac{x}{\operatorname{sn} x} = \frac{x}{\vartheta_3^2} \csc \frac{x}{\vartheta_3} + \frac{4x}{\vartheta_3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)x}{\vartheta_3^2}.$$

Also

$$(5.2) \quad x \csc x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

where

$$(5.3) \quad R_{2m} = (2 - 2^{2m}) B_{2m},$$

and B_{2m} is a Bernoulli number in the even suffix notation. Thus combining (5.1) and (5.2) we get

$$\begin{aligned} \frac{x}{\operatorname{sn} x} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{R_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{x}{\vartheta_3^2} \right)^{2m} + \\ &\quad + \frac{4}{\vartheta_3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{(2n+1)^{2m+1} x^{2m+2}}{\vartheta_3^{2(2m+1)}} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{x}{\vartheta_3^2} \right)^{2m} \left\{ R_{2m} - 8m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m-1} q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Comparing with (1.2) we get

$$(5.4) \quad \frac{\beta_{2m}(u)}{2m} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{4m}} \left\{ \frac{R_{2m}}{2m} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m-1} q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \right\}.$$

If we put

$$\varphi_{2m} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{4m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m-1} q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \quad (m \geq 1),$$

it is apparent that

$$(5.5) \quad \varphi^{2m} (\varphi^t - (-1)^{t/2} \vartheta_3^{-2t}) \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})}.$$

Also it is familiar [6] that, if $p-1 \nmid 2m$,

$$(5.6) \quad R'^{2m} (R'^t - 1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})},$$

where $R'_{2m} = R_{2m}/2m$. Consequently if we put $\beta'_{2m}(u) = \beta_{2m}(u)/2m$, it is clear from (5.4), (5.5) and (3.6) that

$$(5.7) \quad \beta'^{2m} (\beta'^t - A_p^w) \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})} \quad (p-1 \nmid 2m),$$

which is the same as (1.5).

We now show that (5.4) implies additional properties of $\beta_{2m}(u)$. In the first place φ_{2m} has integral coefficients, so that we get

$$(5.8) \quad p \beta_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \cdot p R_{2m} \pmod{p m}.$$

If $p-1 \mid 2m$, the Staudt-Clausen theorem for B_{2m} implies $p R_{2m} \equiv -1 \pmod{p}$ and thus (5.8) yields

$$(5.9) \quad p \beta_{2m}(u) \equiv -A_p^{2m/(p-1)} \pmod{p} \quad (p-1 \mid 2m),$$

which proves (1.4). Indeed (5.8) yields

$$(5.10) \quad p \beta_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \cdot p R_{2m} \pmod{p^{r+1}} \quad (p^r(p-1) \mid 2m).$$

In the next place if $p' \mid m$ but $p-1 \nmid 2m$ then it is known that $B_{2m} \equiv 0 \pmod{p^r}$; by (5.3) it follows that $R_{2m} \equiv 0 \pmod{p^r}$. Hence (5.4) yields

$$(5.11) \quad \beta_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r \mid m, \quad p-1 \nmid 2m).$$

More precisely we may state that the coefficients of

$$(5.12) \quad \frac{\beta_{2m}(u)}{2m} - A_p^{2m/(p-1)} \frac{R_{2m}}{2m}$$

are integral $\pmod{p}$.

Again it is known [4, Th. 3] that when $p^r(p-1) \mid 2m$, then

$$(5.13) \quad B_{2m} + \frac{1}{p} - 1 \equiv 0 \pmod{p^r};$$

indeed

$$(5.14) \quad B_{2m} + \frac{1}{p} - 1 \equiv -2m W_p \pmod{p^{r+1}},$$

where $W_p = ((p-1)! + 1)/p$. Thus (5.4) implies

$$(5.15) \quad \beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv -2m W_p A_p^{2m/(p-1)} \pmod{p^{r+1}}$$

and in particular

$$(5.16) \quad \beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r(p-1) \mid 2m).$$

The restriction in (5.7) that $p-1 \nmid 2m$ can to a certain extent be removed. For brevity put

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{m} \left((B_m t + \frac{1}{p} - 1) \right), \\ \tau_m &= \tau_m(u) = \frac{1}{m} \left\{ \beta_{mt}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1 \right) A_p^{mt} \right\}. \end{aligned}$$

By Theorem 7 of [4] we have

$$(5.17) \quad \sigma^m (\sigma - 1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{t-h'}, p^{e'})},$$

where $p^{e-1}(p-1) \mid t$, $m \geq 1$, $1 \leq r \leq p-1$, h' is the least integer $\geq (r+m-1)e/p$.

Hence by (5.4) we get

$$(5.18) \quad \tau^m(\tau - 1)^r = 0 \pmod{(p^{t-h'}, p^{er})},$$

subject to the same restrictions as (5.17). A more general congruence can be obtained by using Theorem 6 of [4], while results of a slightly different kind can be obtained by using Theorem 4.

6. *The coefficients of dsx and csx .* We have the expansions [8, p. 512]

$$(6.1) \quad \begin{aligned} ds \frac{2Kx}{\pi} &= \frac{\pi}{2K} \csc x - \frac{2\pi}{K} \sum_0^{\infty} \frac{q^{2n+1} \sin(2n+1)x}{1+q^{2n+1}}, \\ cs \frac{2Kx}{\pi} &= \frac{\pi}{2K} \cot x - \frac{2\pi}{K} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n} \sin 2nx}{1+q^{2n}}. \end{aligned}$$

Comparing (6.1) with (5.1) it is clear that the coefficients of $x dsx$ have properties similar to those of $\beta_{2m}(u)$. We shall accordingly not take the space to discuss those coefficients; we shall however briefly discuss the coefficients of $x csx$. Put

$$(6.3) \quad x csx = \sum_0^{\infty} \gamma_{2m}(u) x^{2m}/(2m)!$$

Expanding the right member of (6.2) we find that

$$\frac{\gamma_{2m}(u)}{2m} = \frac{(-1)^m}{q_3^{4m}} \left\{ \frac{2^{2m} B_{2m}}{2m} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2m-1} q^{2n}}{1+q^{2n}} \right\}.$$

Thus we get

$$(6.4) \quad \gamma'^{2m}(\beta'^i - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})},$$

where $\gamma'_{2m}(u) = \gamma_{2m}(u)/2m$, corresponding to (5.7). We have also

$$(6.5) \quad p \gamma_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \pmod{p} \quad (p-1|2m),$$

$$(6.6) \quad \gamma_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r|m, p-1 \nmid 2m),$$

$$(6.7) \quad \gamma_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r(p-1)|2m).$$

Indeed (6.5), (6.6), (6.7) can be generalized as in (5.10), (5.12), (5.14).

7. *The coefficients of dcx , ncx , scx .* We now require the expansions [8, p. 512]

$$(7.1) \quad dc \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K} \sec x + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \cos(2n+1)x}{1-q^{2n+1}},$$

$$(7.2) \quad nc \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2Kk'} \sec x - \frac{2\pi}{Kk'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}},$$

$$(7.3) \quad sc \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2Kk'} \tan x + \frac{2\pi}{Kk'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n} \sin 2nx}{1+q^{2n}}$$

together with

$$(7.4) \quad \sec x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} E_{2m},$$

$$(7.5) \quad \tan x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} T_{2m-1}$$

where E_{2m} is the Euler number and

$$(7.6) \quad T_{2m+1} = 2^{2m} (1 - 2^{2m}) B_{2m} / 2m.$$

The coefficients of dn and nc have similar properties, so that it will suffice to discuss only (7.1) and (7.3). Put

$$(7.7) \quad \operatorname{dc} x = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{dc}_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

$$(7.8) \quad \operatorname{sc} x = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{sc}_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Comparison of (7.7) with (7.1) yields

$$(7.9) \quad \operatorname{dc}_{2m}(u) = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{2(2m+2)}} \left\{ E_{2m} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^{2m} q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} \right\},$$

while (7.8) and (7.3) imply

$$(7.10) \quad \operatorname{sc}_{2m+1}(u) = \frac{(-1)^{m+1}}{\vartheta_3^{2(2m+1)} k'} \left\{ T_{2m+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)^{2m+1} q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right\}.$$

Then since $E^{2m}(E^t - 1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}$ we get

$$(7.11) \quad \operatorname{dc}^m (\operatorname{dc}^t - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})},$$

while $T^{2m+1}(T^t - 1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m+1}, p^{er})}$ gives

$$(7.12) \quad \operatorname{sc}^{2m+1} (\operatorname{sc}^t - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m+1}, p^{er})},$$

where as above $p^{e-1}(p-1) \mid t$ and $t = (p-1)w$.

In the next place we make use of the following result ([6, p. 845], [3, Th. 1]):

$$(7.13) \quad E_{2m} \equiv 1 - (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p^e},$$

provided $p^{e-1}(p-1) \mid 2m$. For such m we have $a^m \equiv 1 \pmod{p^e}$ when $p \nmid a$. Also it follows from (3.6) that

$$A_p^{2m/(p-1)} \equiv (-1)^m \vartheta_3^{-4m} \pmod{p^e}.$$

Thus (7.9) becomes

$$\operatorname{dc}_{2m}(u) \equiv \frac{A_p^{2m/(p-1)}}{\vartheta_3^2} \left\{ 1 + (-1)^{(p-1)/2} + 4 \sum_{\substack{n=0 \\ p \nmid (2n+1)}}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} \right\}.$$

Since

$$\vartheta_3^2 = 1 + 4 \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}},$$

it is clear that

$$4 \sum_{\substack{n=0 \\ p \nmid (2n+1)}}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} = \vartheta_3^2(q) - \vartheta_3^2(q^p),$$

where we have used the fuller notation $\vartheta_3(q)$ in place of ϑ_3 .

Hence we get

$$(7.14) \quad \text{dc}_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \left\{ 1 + \frac{1 + (-1)^{(p-1)/2}}{\vartheta_3^2(q)} - \frac{\vartheta_3^2(q^p)}{\vartheta_3^2(q)} \right\} \pmod{p^e},$$

provided $p^{e-1}(p-1) \mid 2m$. When $e=1$ and $p \equiv 1 \pmod{4}$, (7.14) reduces to

$$(7.15) \quad \text{dc}_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \left(1 - \frac{1}{A_p} \right) \pmod{p}.$$

The corresponding formulas for $\text{sc}_{2m}(u)$ are somewhat more complicated and will not be stated.

References

- [1] BELL, E. T.: On the power series for elliptic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36**, 841–852 (1934). — [2] CARLITZ, L.: Congruences connected with the power series expansions of the Jacobi elliptic functions. *Duke Math. J.* **20**, 1–12 (1953). — [3] CARLITZ, L.: A note on Euler numbers and polynomials. *Nagoya Math. J.* **7**, 35–43 (1954). — [4] CARLITZ, L.: Some congruences for the Bernoulli numbers. *Amer. J. Math.* **75**, 163–172 (1953). — [5] FRICKE, R.: Die elliptische Funktionen und ihre Anwendungen, vol. 1. Leipzig and Berlin 1916. — [6] FROBENIUS, G.: Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome. *Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss.* **1910**, 809–847. — [7] HURWITZ, A.: Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Funktionen. *Mathematische Werke*, vol. 2, pp. 342–373. Basel 1933. — [8] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: *Modern Analysis*, 4th ed. Cambridge 1927.

Dept. of Math., Duke University, Durham, N. C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 2. September 1955)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. V

Von

WALTER NEUMER

Vorbemerkung

Im nachstehenden 5. Abschnitt dieser Arbeit¹⁾ wird der im 1. Abschnitt entwickelte konstruktive Algorithmus über die dortige Grenzzahl $1VII'I'' \dots$ [I, § 2, (19)] hinaus ein Stück Wegs fortgesetzt bis zu einer provisorisch mit $\mathcal{E}$ bezeichneten Grenzzahl. Diese Fortsetzung ermöglicht es unter anderem, der von H. BACHMANN²⁾ auf nicht konstruktivem Wege definierten Zahl $H(1)$ einen Platz im Algorithmus zu geben, und zwar ist $H(1) = 1VI \quad 1VI \quad 1V$.

Das kann aber erst im 7. Abschnitt gezeigt werden, nachdem zuvor im 6. Abschnitt auch der weitergeführte konstruktive Algorithmus zu einem „freien“ (d.h. zu einem auf beliebige Ordnungszahlen mit beliebigen Operatoren anwendbaren) Algorithmus verallgemeinert sein wird, analog der Umwandlung des konstruktiven Algorithmus von I in den freien Algorithmus von II. Im 7. Abschnitt soll der schon in der Vorbemerkung zu I angekündigte Algorithmus für Normalfunktionen entwickelt werden, und zwar sogleich entsprechend dem im vorliegenden Abschnitt erreichten Stande des konstruktiven Algorithmus. Eine Skizze des Algorithmus für Normalfunktionen und seines Parallelismus mit dem (freien) Algorithmus für Zahlen, allerdings nur entsprechend dem Stande des konstruktiven Algorithmus von I, ist vom Verfasser inzwischen anderweitig erschienen³⁾. In dieser Skizze wurde zugleich ein weiterer Zusammenhang der beiden Algorithmen dargestellt, der durch eine von BACHMANN a. a. O.²⁾ und DENJOY⁴⁾ verwendete Bezeichnungsweise für die Folge der höheren Ableitungen einer Normalfunktion vermittelt wird, und es wurde darauf hingewiesen, daß sich hieraus eine Fortführung des Algorithmus für Zahlen über den Ausdruck $\alpha VII'I'' \dots$ hinaus müsse gewinnen lassen. Der nunmehr vorgelegte 5. Abschnitt bringt in gewissem Umfange eine Ausführung dieses Hinweises für den konstruktiven Algorithmus und liefert damit zugleich die effektive Definition von Fundamentalfolgen

¹⁾ Die vier vorangehenden Abschnitte sind in dieser Zeitschrift 58, 391—413 (1953); 59, 434—454 (1954); 60, 1—16 (1954); 61, 47—69 (1954) erschienen. Sie werden als I bis IV zitiert; die Paragraphen sind durchgehend, die Formeln, Sätze und Fußnoten abschnittsweise numeriert.

²⁾ Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Dissertation Zürich 1950.

³⁾ Ein Algorithmus für Normalfunktionen. Proc. of the Int. Congr. of Math. 1954, II, 147—149. Amsterdam 1954.

⁴⁾ L'énumération transfinie, II, 2. Paris 1952.

für die Limeszahlen eines erheblich größeren Abschnitts der zweiten Zahlenklasse, als er in jener Skizze genannt wurde. Auch dies wird erst im 7. Abschnitt deutlich werden.

5. Abschnitt

Weiterführung des konstruktiven Algorithmus über $1VII'I''$... hinaus

§ 12. Vorbereitende Erläuterungen

1. Wir ersetzen zunächst die provisorische Bezeichnung $1VII'I''$... für die Grenzzahl des konstruktiven Algorithmus von **I** durch eine „vollreguläre“ mittels der Definition (vgl. § 14, 2, 1. Absatz)

$$(1) \quad \underline{1VI_1} = \lim \{1VI, 1VII', 1VII'I'', \dots\}.$$

Dabei halten wir die Verabredung von **I**, § 1 ein, daß in definierenden Gleichungen (auch schematischer Art) die regulären Zahlenfiguren unterstrichen werden sollen. Die Grundkonzeption des Algorithmus von **I** bleibt auch für die neuen Verabredungen wirksam, welche durch die Hinzunahme eines neuen Symbols ($\mathcal{V}$) und einer neuen Bezeichnungstechnik (untere Indizes) erforderlich werden. Wir wollen dies an Hand von **I**, § 1 besprechen. Zunächst geben wir folgende Erklärung, welche die im 1. Absatz von § 1, 1 gegebene mit umfaßt:

Eine Ordnungszahl oder kurz Zahl soll in diesem (5.) Abschnitt eine — im allgemeinen „zweidimensionale“ — Figur aus endlich vielen „Einzelzeichen“

$$(2) \quad 1, +, (), V, \mathcal{V}, I, I', I'', I''', I'''' , \dots$$

sein⁵⁾, welche nach bestimmten Regeln, unter anderem mit Verwendung der Potenz- und Indexschreibweise⁶⁾, aus der Fig. 1 abgeleitet ist. — Der Begriff „Ableitung“ hat dabei dieselbe Bedeutung wie in § 1.

Die Bezeichnung der Zahlen $< 1VI_1$ bleibt ungeändert; neue Bezeichnungen treten nur für „neue“ Zahlen auf, d. h. für Zahlen $\geq 1VI_1$.

Die Absätze 2 bis 4 von § 1, 1 gelten weiterhin. Die im 4. Absatz gegebene provisorische Erklärung des Operators ist jedoch dahin zu ergänzen, daß die zur Bildung von Operatoren verwendeten Zeichen $I, I', I'', \dots$ mit (unteren) Indizes versehen sein können, die selbst wieder Zeichenfiguren sind. — Die Unterscheidung von Operatoren 1., 2., 3., ... Stufe bleibt weiterhin ein Instrument des Algorithmus.

Die Indexschreibweise wird in diesem Abschnitt nur im Anschluß an eines der Symbole $I, I', I'', \dots$ vorgenommen. Die gesamte Zeichenfigur, welche einem dieser Symbole innerhalb einer Zahlenfigur durch Rechts-tief-

⁵⁾ Ausnahmen s. **I**, Fußnote ⁶⁾.

⁶⁾ Potenzierung und Indizierung, d. h. Rechts-hoch- und Rechts-tief-Stellung könnten freilich durch je ein besonderes Zeichen ersetzt werden; dann bliebe die Figur in einer Zeile, wäre aber weniger übersichtlich.

Stellung angeheftet wird, heißt sein *Supponent*; rechts vom Supponenten stehende Zeichen der betreffenden Zahlenfigur gehören dann nicht mehr zu ihm, was unter Umständen mittels einer () zum Ausdruck gebracht werden muß (s. die Klammerregeln in § 13, 6).

Für die Zahlenfiguren des Algorithmus wird die Links-rechts-Struktur auch weiterhin streng durchgeführt (vgl. I, § 1, 2, letzter Absatz; I, § 2, 3; II, § 4, 3, letzter Absatz); unter anderem schreiben wir niemals zwei Einzelzeichen einer Zahlenfigur in dieselbe Vertikale; man kann demnach die Einzelzeichen einer Zahlenfigur von links nach rechts eindeutig durchnummern [wobei „halbe“ Klammern „(“ und „)“ dann als Einzelzeichen zu zählen sind]. Unter einer *Teilfigur* einer Zahlenfigur verstehen wir eine Gruppe ihrer Einzelzeichen, welche von links nach rechts ohne Auslassungen (von Klammern eventuell abgesehen) aufeinander folgen, aber nicht die gesamte Figur erschöpfen. Das erste Einzelzeichen einer (Teilfigur einer) Zahlenfigur bestimmt die *Grundzeile* der Figur. Wird die Figur im Verlauf einer weiteren Konstruktion in eine () eingeschlossen, so werden deren beide Hälften in die Grundzeile der Figur gesetzt. — Analog sprechen wir von einer Teilfigur einer Teilfigur.

2. Im Algorithmus der Zahlen $> 1V I_1$ treten neben die Operatoren noch zwei weitere Arten von Teilfiguren mit selbständiger Bedeutung: *Fazienten* und *Operanten*. Erstere treten nur als Supponenten oder als Teilfiguren von solchen auf; die Operanten sind immer Teilfiguren von Fazienten. Wie bei den Operatoren unterscheiden wir Operanten 1., 2., 3., ... *Stufe*. Die Operanten 1. Stufe werden auf Zahlen, und zwar hier nur auf die Zahl 1, oder auf Fazienten „ausgeübt“ und das „Ergebnis“ ist stets ein *Fazient*. Der einfachste Operant 1. Stufe ist $\mathcal{V}$. Ein Operant $(n+1)$. Stufe wird nur auf Operanten n . Stufe ausgeübt und das Ergebnis ist wieder ein Operant n . Stufe. Die einfachsten Operanten 2., 3., 4., ... Stufe sind $I, I', I'', \dots$. Ob ein Symbol $I, I', I'', \dots$ einen Operator oder einen Operanten bedeutet, geht aus seiner Stellung in der Gesamtfigur hervor. Die $I, I', I'', \dots$ können auch als Operantensymbole mit Supponenten (Zahlen oder Fazienten) behaftet werden. — Die Fazienten haben stets einen „Anfang“ (§ 15, 1) $1\mathcal{V}$, die Operanten 1. Stufe einen Anfang $\mathcal{V}$. Die Operanten können noch mit Exponenten versehen sein; diese sind Zahlen oder Fazienten.

Als Variable für Fazienten verwenden wir große griechische Buchstaben, desgleichen für Figuren, von denen es noch dahingestellt bleibt, ob sie Fazienten oder Zahlen sind. Große lateinische Buchstaben (außer $V, \mathcal{V}, I$) verwenden wir wieder als Variable für alle Arten von Zeichenfiguren (Zahlen, Fazienten, Operatoren, Operanten und sonstige Teilfiguren); kleine griechische Buchstaben bedeuten stets Ordnungszahlen, kleine deutsche Buchstaben stets natürliche Zahlen ≥ 1 .

Die Unterscheidung von *vollständigen Figuren* und *festen Abkürzungen* sowie die von *regulären Figuren* und *Hilfsfiguren* gehört weiterhin zur Technik des Algorithmus und bezieht sich jetzt außer auf Zahlen und Operatoren

auch auf Fazienten und Operanten. — Bei Beachtung der vorstehenden Bemerkungen bleiben die Ausführungen von § 1, 1 ab 5. Absatz einschließlich sowie die gesamten Ziffern 2, 3 und 4 des § 1 uneingeschränkt verbindlich (im 1. Absatz von § 1, 2 und im viertletzten Absatz von § 1, 4 ist außer auf § 2 bzw. § 2, 2 noch auf die nachstehenden Ausführungen des gesamten § 14 verwiesen zu denken). — Wir erinnern insbesondere an die Gleichheitsdefinition im letzten Absatz von § 1, 1. Es ist zuweilen bequem, für die *Identität*, einen Sonderfall unserer Gleichheit, ein eigenes Zeichen zu haben, und zwar schreiben wir $F_1 \text{ id } F_2$ bzw. $F_1 \text{ non id } F_2$ um auszudrücken, daß die Variablen F_1 und F_2 dieselben bzw. verschiedene Zeichenfiguren bedeuten.

Zu den beiden Konstruktionsprinzipien von § 1, 3 kommt indessen ein drittes hinzu:

III. Konstruktionsprinzip. In einer ersten Hilfsfigur $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ besteht die vollständige Zahlenfigur α_1 aus der geringsten Anzahl von Einzelzeichen, welche durch die Ableitungsschemata ermöglicht wird.

Das soll folgendes besagen. Ist neben der Hilfsfigur $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ auch die von ihr verschiedene Figur $\lim \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$ auf Grund der Ableitungsschemata formal möglich und „konkurrieren“ beide Figuren, d. h. läßt sich zu jedem α_i bzw. β_i ein $\beta_j > \alpha_i$ bzw. $\alpha_j > \beta_i$ angeben, so muß α_1 weniger Einzelzeichen aufweisen als β_1 . — Wir werden sehen, daß dieses Prinzip stets funktioniert (§ 14, 2 bis 4, § 15, 5).

In I war ein solches Prinzip noch nicht notwendig, weil wir verabreden konnten, daß die in einer Zahlenfigur auftretenden Exponenten zuvor schon konstruiert sein sollten (§ 1, 5). Diese Forderung läßt sich aber für Fazienten (als Exponenten oder Supponenten) schlecht übernehmen. Umgekehrt macht das III. Konstruktionsprinzip im Verein mit den beiden ersten derartige Forderungen überflüssig.

Die Ziffer 5 von § 1 soll auch für den Algorithmus über $1VI_1$ hinaus die Handhabung der Addition von Zahlen und der Ausübung von Operatoren festlegen. Daraus ergibt sich, daß die Exponenten von Operatoren stets Zahlen sind. — Die Koeffizienten- und die Exponentenregel von § 1, 5 übernehmen wir also auch für den Algorithmus der Zahlen $> 1VI_1$. Wir bemerken jedoch, daß die in diesen Regeln ausgesprochenen Klammervorschriften nicht mehr ausreichen, um die Mehrdeutigkeiten auszuschalten, welche durch das Auftreten mehrzeiliger Supponenten entstehen können. Dasselbe gilt für die sonstigen im § 1, 5 explizit und implizit zum Ausdruck gebrachten Klammervorschriften. Wir verweisen diesbezüglich auf die Klammerregeln von § 13, 6, welche unbeschadet noch weiterer einstweilen zu gebender Vorschriften sämtliche Fälle aufzählen, in denen Klammern gesetzt werden.

3. Es wird sich ergeben, daß die transfiniten regulären Zahlenfiguren auch im fortgeführten Algorithmus die Form haben [vgl. I, (21)]:

$$(3) \quad \chi_1 q_1 + \dots + \chi_k q_k + r \quad (\chi_1 > \dots > \chi_k),$$

wo $q_1, \dots, q_k$ und r natürliche Zahlen sind, von denen $k=1$ sein und r (genauer: $+r$) fehlen darf, während die χ_i sog. *Hauptzahlen* (§ 1, 5, 1. Absatz)

sind, d.h. Zahlenfiguren, welche aus den Zeichen (2) bestehen und V wirklich enthalten, die aber bezüglich der Form (3) „unzerlegbar“ sind; eine Hauptzahl weist demnach $+$ -Zeichen höchstens in Exponenten oder Supponenten auf. — Die in (3) angeschriebenen $+$ -Zeichen befinden sich natürlich in der Grundzeile der gesamten Figur (3), welche zugleich die Grundzeile der einzelnen „Summanden“ ist.

Überhaupt besitzt jede transfinite Zahlenfigur aus den Zeichen (2), auch als Hilfsfigur, die Form (3), und sie ist immer regulär, wenn r nicht fehlt oder bei fehlendem r der Koeffizient $q_k > 1$ ist. (3) kann nur dann Hilfsfigur sein, wenn r fehlt und $q_k = 1$ ist, und auch dann nur, wenn entweder χ_k Hilfsfigur ist oder, wenn nicht, $\chi_k = \chi_{k-1}$ ist; im letzteren Fall lautet die reguläre Zahlenfigur zu (3):

$$\chi_1 q_1 + \cdots + \chi_{k-1} (q_{k-1} + 1)$$

[nach dem ersten Konstruktionsprinzip (§ 2, 3) sind $\chi_1, \dots, \chi_{k-1}$ jedenfalls regulär].

Wir nennen die Ausdrücke $\chi_i q_i$ sowie r die *Summanden* von (3).

Diejenigen *Exponenten* und *Supponenten*, welche keine Zahlen sind, sind *Fazienten* der Form

$$(4) \quad \Delta_1 \xi_1 + \cdots + \Delta_k \xi_k + \eta,$$

wo die Δ_i ebenfalls Fazienten bedeuten; η kann fehlen und k darf $= 1$ sein. Die Ausdrücke $\Delta_i \xi_i$ sowie die Zahl η heißen die *Summanden* von (4); die Zahl ξ_i heißt der *Koeffizient* von Δ_i . Die Δ_i sind hinsichtlich der Form (4) „unzerlegbar“ und werden *Hauptfazienten* genannt. — Die in (4) angeschriebenen $+$ -Zeichen stehen wieder in der Grundzeile der gesamten Figur (4), welche zugleich die Grundzeile der Δ_i, ξ_i und von η ist.

In den Summanden $\chi_i q_i$ von (3) bzw. $\Delta_i \xi_i$ von (4) heißt χ_i bzw. Δ_i der Multiplikand, q_i bzw. ξ_i der Multiplikator; die Ausdrücke $\chi_i q_i$ und $\Delta_i \xi_i$ heißen Produkte. Im Algorithmus werden nur Produkte aus zwei Faktoren vorstehender Art gebildet. — Für die Produkte, deren Multiplikanden Fazienten sind, gilt folgende

Koeffizientenregel für Fazienten. Die Formel $\Delta \xi$, wo Δ ein Fazient, ist eine Abkürzung für $\Delta(\xi)$, wenn die Variable ξ eine Zahlenfigur bedeutet, die $+$ -Zeichen in der Grundzeile enthält. ξ darf auch die Zahl 1 bedeuten, aber diese 1 wird dann nicht hingeschrieben; wir sagen dann, Δ habe den Koeffizienten 1.

Der Fazient (4) befindet sich in Hilfsform nur in folgenden Fällen (sonst ist er reguläre Teilfigur): 1. η ist in Hilfsform. 2. η fehlt und ξ_k ist in Hilfsform. 3. η fehlt zugleich mit ξ_k (d.h. $\xi_k = 1$) und Δ_k ist in Hilfsform. 4. η und ξ_k fehlen und es gilt Δ_k id Δ_{k-1} ; dann ist aber

$$\Delta_1 \xi_1 + \cdots + \Delta_{k-1} (\xi_{k-1} + 1)$$

die reguläre Form von (4) (vgl. die Regeln in § 13, 3). — Die Δ_i und ξ_i mit $i < k$ sind immer regulär, desgleichen Δ_k , falls $\xi_k > 1$, und $\Delta_k \xi_k$, falls η nicht

fehlt. — Diese Bemerkungen ergeben sich aus dem I. Konstruktionsprinzip (§ 1, 3) unter Beachtung des Umstandes, daß der Fazient (4) einmal als abschließende Teilfigur eines Anfangs (§ 15, 1) einer Zahlenfigur vorkommt (die ihrerseits regulär oder in Hilfsform sein kann).

§ 13. Neue Ableitungsschemata

1. Zwecks übersichtlicher Darstellung der Ableitungsregeln, die zu denen in § 1, 5 neu hinzukommen, bedienen wir uns für eine Zahlenfigur ζ , die ohne das Zeichen $\lim$ gebildet ist, also nur aus den Zeichen (2) besteht, einer schematischen Abkürzung $\zeta = [U]$; darin bedeutet U eine Teilfigur von ζ , welche die Bedingungen erfüllt: 1. U ist keine Zahlenfigur und kommt auch in keiner Teilfigur von ζ vor, die Zahlenfigur ist. 2. U steht am Schluß von ζ , d. h. U enthält das letzte Einzelzeichen von ζ (einschließlich Klammern). — Verschiedene Zahlenfiguren mit demselben Schluß- U kann man, wenn nötig, durch Kennzeichnung der Klammern $[]$ unterscheiden, etwa in der Form $[U]$, $[U]^*$, $[U]'$ usw. Das nämliche kann man machen, um dieselbe Zahlenfigur auf verschiedene Weisen abzukürzen, etwa $[U]$ id $[W]^*$ (mit U non id W), oder um überhaupt verschiedene Zahlenfiguren zu unterscheiden, also $[U]$ non id $[W]^*$ (einerlei, ob U und W identisch sind oder nicht). — Wenn wir sagen, daß die Zahlenfigur $\eta = [T]$ aus $\zeta = [U]$ abgeleitet sei: $[U] \rightarrow [T]$, so bedeutet dies, daß η aus ζ entsteht, indem die Zeichengruppe U durch die Zeichengruppe T ersetzt wird. Das entsprechende gilt für Definitionen der Form

$$(5) \quad (a) [U] = \lim_n [U_n] \quad (b) [U] = \lim \{[U_1], [U_2], [U_3], \dots\},$$

welche in dem Sinne $[U_n] \rightarrow [U_{n+1}]$, $[U_n] \rightarrow [U]$ gemeint sind. (Die Indizes 1, 2, ..., n dienen hier lediglich zur Unterscheidung und brauchen keine Supponenten im Sinn des Algorithmus zu sein.) — Die $[U_i]$ in (5) sind regulär, $[U]$ ist Hilfsfigur oder regulär (vgl. § 1, 3, Limesbildung).

Analog verwenden wir später (in § 15) die Abkürzung $\zeta = \langle U \rangle$, wo U entweder ζ selbst oder eine Teilfigur von ζ bedeutet, die das letzte Einzelzeichen von ζ enthält (von Klammern eventuell abgesehen).

2. Nun stellen wir die Regeln für das Anbringen von Supponenten zusammen, wobei $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$ für I', I'', I''' stehen soll; ferner schreiben wir der Kürze halber $I_1^{(n)}, I_A^{(n)}$ statt $I^{(n)}_1, I^{(n)}_A$ usw. (eine Vereinfachung, welche sich bei Figuren wie $I^{(1000)}_1 V$ verbietet).

$$(\text{Sup, a}) \quad [I_1] = \lim \{[I], [I I'], [I I' I''], \dots\}$$

$$(\text{Sup}^{(n)}, a) \quad [I_1^{(n)}] = \lim \{[I^{(n)}], [I^{(n)} I^{(n+1)}], [I^{(n)} I^{(n+1)} I^{(n+2)}], \dots\}$$

$$(\text{Sup, b}) \quad [I_{A+1}] = \lim \{[I_A], [I_A I'_A], [I_A I'_A I''_A], \dots\}$$

$$(\text{Sup}^{(n)}, b) \quad [I_{A+1}^{(n)}] = \lim \{[I_A^{(n)}], [I_A^{(n)} I_A^{(n+1)}], [I_A^{(n)} I_A^{(n+1)} I_A^{(n+2)}], \dots\}$$

$$(\text{Sup}, c) \quad [I_\lambda] = \lim_p [I_{\alpha_p}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$(\text{Sup}^{(n)}, c) \quad [I_\lambda^{(n)}] = \lim_p [I_{\alpha_p}^{(n)}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$(\text{Sup}, d) \quad [I_{1\mathcal{V}}] = \lim \{ [I_1], [I_{[I_1]}], [I_{[I_{[I_1]}]}], \dots \}$$

$$(\text{Sup}^{(n)}, d) \quad [I_{1\mathcal{V}}^{(n)}] = \lim \{ [I_1^{(n)}], [I_{[I_1^{(n)}]}^{(n)}], [I_{[I_{[I_1^{(n)}]}^{(n)}]}^{(n)}], \dots \}.$$

In den Formeln (b) ist Δ eine Zahl oder ein Fazient. Betreffend (Sup, c) soll $[I_{\lambda_i}]$ ($i \geq 2$) die i -te Hilfsfigur der zu $[I_\lambda]$ gleichen regulären Figur sein, wenn λ_i die i -te Hilfsfigur von λ ist; entsprechend hinsichtlich (Sup⁽ⁿ⁾, c). — I_Γ bzw. $I_\Gamma^{(n)}$, Γ Zahl oder Fazient, bedeutet innerhalb einer Zahlenfigur stets einen Operator oder Operanten 2. bzw. $(n+2)$. Stufe. — Die angeschriebenen I -Symbole in einer der vorstehenden Sup-Formeln sind entweder sämtlich Operatoren oder sämtlich Operanten, was im konkreten Falle eindeutig auf Grund ihrer Stellung in der Gesamtfigur entschieden wird.

3. In den jetzt folgenden Regeln wird die Konstruktion der Fazienten festgelegt; Δ bedeutet demgemäß überall einen Fazienten.

$$(\text{Faz}, a) \quad [\Delta + \lambda] = \lim_p [\Delta + \alpha_p] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$(\text{Faz}, b) \quad [\Delta(\xi + 1)] = [\Delta\xi + \Delta]$$

$$(\text{Faz}, c) \quad [\Delta\lambda] = \lim_p [\Delta\alpha_p] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$(\text{Faz}, d) \quad [\Delta + 1\mathcal{V}] = \lim \{ [\Delta + 1], [\Delta + [\Delta + 1]], [\Delta + [\Delta + [\Delta + 1]]], \dots \}$$

$$(\text{Faz}, e) \quad [\Delta\mathcal{V}] = \lim \{ [\Delta], [\Delta[\Delta]], [\Delta[\Delta[\Delta]]], \dots \}.$$

In den vorstehenden Faz-Formeln bedeutet $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha_p$, $\Delta[\Delta]$ usw. ein Produkt aus dem Fazienten Δ und den Zahlen λ , α_p , $[\Delta]$ usw. — Ist λ_i ($i \geq 2$) die i -te Hilfsfigur für λ , so soll $[\Delta + \lambda_i]$ bzw. $[\Delta\lambda_i]$ die i -te Hilfsfigur der zu $[\Delta + \lambda]$ bzw. $[\Delta\lambda]$ gleichen regulären Figur sein.

4. Nun geben wir die Regeln für das Anbringen von Exponenten bei Operanten.

$$(\text{Exp}, a) \quad [TU^{\Delta+1}] = [(TU^\Delta)U]$$

$$(\text{Exp}, b) \quad [U^\lambda] = \lim_p [U^{\alpha_p}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$(\text{Exp}, c) \quad [U^{1\mathcal{V}}] = \lim \{ [U], [U^{[U]}], [U^{[U^{[U]}]}], \dots \}.$$

In vorstehenden Exp-Formeln ist U überall ein Operant. In (Exp, a) ist Δ eine Zahl oder ein Fazient; U ist entweder ein Operant 1. oder $(n+1)$. Stufe; im ersten Fall ist T die Zahl 1 oder ein Fazient, im zweiten Fall ein Operant n . Stufe; ferner sind TU^Δ , $TU^{\Delta+1}$ und $(TU^\Delta)U$ im ersten Fall Fazienten, im zweiten Fall Operanten n . Stufe. — $[U^{\lambda_i}]$ ($i \geq 2$) ist die i -te Hilfsfigur der zu $[U^\lambda]$ gleichen regulären Zahlenfigur, wenn λ_i die i -te Hilfsfigur für λ ist. — Als Auswirkung der beiden Konstruktionsprinzipien von

§ 1, 3 ergibt sich, daß U^A nie ein Operant ist, wenn U einer ist und A ein Fazient oder eine Zahl > 1 ist. — Entsprechend der Exponentenregel für Operatoren (§ 1, 5) setzen wir fest:

Exponentenregel für Operanten. Ist X ein Operant, so darf in der Formel X^A die Variable A (der „Exponent“ von X) auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird nicht hingeschrieben; wir sagen dann, X habe den Exponenten 1. — Enthält der Operant X in seiner Grundzeile mindestens zwei Zeichen $\mathcal{V}, I, I', I'', \dots$, so ist X^A eine Abkürzung für $(X)^A$, und bei Ersetzung von A durch 1 wird außer dieser 1 auch die $()$ um X weggelassen.

5. Die Ausübung des „iterierenden“ Operanten $\mathcal{V}$ auf die Zahl 1 oder einen geeigneten Fazienten A wird durch die Schemata (Sup, d), (Sup⁽ⁿ⁾, d), (Faz, d), (Faz, e), (Exp, c) geregelt. Die Anwendung der gleichfalls „iterierenden“ Operanten $I, I', I'', \dots$ findet gemäß folgenden Regeln statt:

$$(It) \quad [AWI] = \lim \{ [AW], [AW^{\Delta W}], [AW^{\Delta W^{\Delta W}}], \dots \}$$

$$(It') \quad [AWXI'] = \lim \{ [AWX], [AWX^{\Delta WX}], [AWX^{\Delta WX^{\Delta WX}}], \dots \}$$

$$(It^{(n)}) \quad \begin{cases} [AWX \dots X_{n-1} I^{(n)}] = \lim \{ [AWX \dots X_{n-1}], [AWX \dots X_{n-1}^{\Delta WX \dots X_{n-1}}], \\ [AWX \dots X_{n-1}^{\Delta WX \dots X_{n-1}^{\Delta WX \dots X_{n-1}}], \dots \}. \end{cases}$$

Um sogleich (It⁽ⁿ⁾) zu erläutern, bemerken wir, daß $W, X, X_1, \dots, X_{n-1}$ ($n \geq 2$) Operanten 1., 2., ..., ($n+1$). Stufe sind; der Operant ($n+2$). Stufe $I^{(n)}$ ist auf X_{n-1} ausgeübt; $X_{n-1} I^{(n)}$ ist ein Operant ($n+1$). Stufe, ausgeübt auf $X_{n-2}, \dots, X \dots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operant 2. Stufe, ausgeübt auf $W, WX \dots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operant 1. Stufe, ausgeübt auf A , und A ist entweder die Zahl 1 oder ein Fazient. Die in $[\]$ befindlichen Ausdrücke in (It⁽ⁿ⁾) sind Fazienten. Die Rechts-hoch-Stellungen beziehen sich stets auf X_{n-1} . — Entsprechend sind (It) und (It') zu interpretieren.

Allgemein bemerken wir: Ist U auf T ausgeübt, so daß die Figur TU entsteht [also T eine Zahl oder ein Fazient bzw. ein Operator oder Operant n . Stufe, U ein Operator oder Operant 1. bzw. ($n+1$). Stufe], so ist die Grundzeile von TU zugleich die von T und U . — Wird ein Operator oder Operant U mit einem Exponenten A versehen, so ist die Grundzeile von U^A die von U , während die Grundzeile von A in der Figur U^A die zur Grundzeile von U nächsthöhere Zeile ist.

6. Nun stellen wir die Vorschriften zusammen, nach denen die Klammern angewendet werden sollen. Um sie leichter formulieren zu können, sagen wir von einer Teilfigur T einer Zahlenfigur (oder auch von einer Zahlenfigur T selbst), daß sie sich *überschneide*, wenn sie einen (oder mehrere) Supponenten enthält, von denen Einzelzeichen in der Grundzeile von T stehen.

Klammerregeln. Eine Teilfigur T einer aus den Zeichen (2) bestehenden Zahlenfigur wird in () eingeschlossen in folgenden Fällen:

1. T ist Multiplikator mit wenigstens einem $+$ -Zeichen in seiner Grundzeile.
2. T ist ein Multiplikand, der einen oder mehrere Supponenten enthält oder dessen letztes Einzelzeichen ein Symbol $I, I', I'', \dots$ ist, das in der nächsthöheren Zeile zur Grundzeile von T steht.
3. T ist ein sich überschneidender Summand einer Summe (3) oder (4), auf den noch ein weiterer Summand folgt.
4. T ist eine transfinite Zahl oder ein Fazient und wird einem Operator bzw. Operanten 1. Stufe unterworfen.
5. T ist ein sich überschneidender Operator oder Operant der Form I_A oder $I_J^{(n)}$ oder ein Operator bzw. Operant mit wenigstens zwei Zeichen V bzw. $\mathcal{V}, I, I', I'', \dots$ in seiner Grundzeile und T wird mit einem Exponenten versehen oder einem Operator bzw. Operanten der nächsthöheren Stufe unterworfen.

Beispiele zu diesen Vorschriften sind in § 15, 4 gegeben.

§ 14. Fortsetzung des Algorithmus bis zur Grenzzahl Ξ

1. Nun muß gezeigt werden, daß die Anwendung der in § 1, 3, 5 und § 13, 2 bis 5 aufgestellten Ableitungsregeln, wenn sie, mit der Zahlenfigur 1 beginnend, in Befolgung der drei Konstruktionsprinzipien von § 1, 3 und § 12, 2 vorgenommen wird, einen zwangsläufigen Prozeß der Konstruktion von Zahlenfiguren bewirkt, mit dessen Darlegung zugleich der Nachweis verbunden ist, daß im Bereich der so entwickelten (voll)regulären Zahlenfiguren die transfinite Induktion gilt (vgl. § 1, 4). Im § 2, 1 und 2 ist dies für die Zahlenfiguren $< 1VI_1$ geleistet und es kommt darauf an, das entsprechende für den Abschnitt von $1VI_1$ bis Ξ zu tun. Dabei ist das Augenmerk wieder darauf zu richten, daß die Limesdefinitionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{S}_n$), ($\mathfrak{S}$), ($\mathfrak{S}^{(n)}$), (Sup), (Sup⁽ⁿ⁾), (Faz), (Exp), (It), (It⁽ⁿ⁾), sofern sie im Zuge des ab 1 entwickelten Algorithmus erfolgen, zugleich eine Ableitung der definierten Zahlen im Sinne von § 1, 2, 4 darstellen. — In § 2, 1 wurden der Durchführung dieses Programms im damaligen Rahmen (§ 2, 2) noch einige Erläuterungen vorausgeschickt. Die dortigen Bemerkungen über die additive und die Operatoronstruktion können auch für die Fortsetzung des Algorithmus über $1VI_1$ hinaus als maßgebend angesehen werden. Die Handhabung der neuen Regeln von (Sup) bis (It), d. h. im wesentlichen das Hantieren mit Fazienten und Operanten, läßt sich jedoch nicht ebenso in allgemeiner Weise charakterisieren, ohne daß man auf die konkrete Konstruktion eingeht. Wir beginnen daher mit dieser sogleich und weisen auf die sich dabei ergebenden Methoden von Fall zu Fall hin.

2. Der erste Schritt über den in I entwickelten Algorithmus hinaus ist die Definition seiner Grenzzahl als algorithmische Zahlenfigur, und zwar als Limes der Folge $1VI, 1VII', 1VIII'', \dots$ oder einer mit ihr konkurrierenden. Hierfür bieten sich rein formal die Schemata (Sup, a), (Sup⁽ⁿ⁾, a) ($n = 1, 2, 3, \dots$)

an; von diesen *muß* aber gemäß dem III. Konstruktionsprinzip das erste gewählt werden. Damit kommt die Gl. (4) von § 12 nach Schema (Sup, a) zustande und die Figuren $1VII'_1$, $1VII''I'_1$ usw. scheiden aus. — Von $1VI_1$ aus beginnen wir die Konstruktion von vorne; es ist klar, daß der Weg, der von 1 zu $1VI_1$ geführt hat, völlig analog von $1VI_1$ über die Zahlen

$$1VI_1 + 1, \dots, 1VI_1 + 1V, \dots, 1VI_1 + 1VI, \dots, 1VI_1 + 1VII', \dots$$

$$\frac{1VI_1(1+1)}{1VI_1(1+1)} = \frac{1VI_1 2}{1VI_1 2} = 1VI_1 + 1VI_1$$

$$= \lim \{1VI_1 + 1VI, 1VI_1 + 1VII', 1VI_1 + 1VII''I'', \dots\}$$

(Schema (℔, 1) und (Sup, a)),

$$1VI_1 3, \dots, \frac{(1VI_1)V}{n} = \lim_n (1VI_1)n \text{ (Schema (℔))}, \dots, (1VI_1)VI, (1VI_1)VII', \dots,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1(VI_1)^{1+1}}{1(VI_1)^{1+1}} = \frac{1(VI_1)^2}{1(VI_1)^2} = (1VI_1)VI_1 \\ \quad \quad \quad = \lim \{(1VI_1)VI, (1VI_1)VII', (1VI_1)VII''I'', \dots\} \end{array} \right.$$

(Schema (℔₁, a) und (Sup, a) mit $[I] = (1VI_1)VI$, $1(VI_1)^3, \dots, 1(VI_1)I$, $1(VI_1)II', \dots$ zu der Zahl

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1VI_1^{1+1}}{1VI_1^{1+1}} = \frac{1VI_1^2}{1VI_1^2} = 1(VI_1)I_1 \\ \quad \quad \quad = \lim \{1(VI_1)I, 1(VI_1)II', 1(VI_1)II''I'', \dots\} \end{array} \right.$$

führt, indem wir VI_1 als Operator 1. Stufe erkennen und behandeln. Dabei erscheint laut (7) I_1 als Operator 2. Stufe, d.h. man kann zu $1VI_1^3, \dots, 1VI_1^{1VI_1}, \dots$ fortschreiten und gemäß (℔') (§ 1, 5) die Zahl $1VI_1 I'$ bilden, entsprechend $1VI_1 I' I''$ usf. Dies führt zur Anwendung von (Sup', a) mit $[I'] = 1VI_1 I'$ und liefert die Zahl

$$(8) \quad \frac{1VI_1 I'_1}{1VI_1 I'_1} = \lim \{1VI_1 I', 1VI_1 I' I'', 1VI_1 I' I'' I''', \dots\}.$$

Nun ist I'_1 ein Operator 3. Stufe, den man dem Operator I'' unterwerfen kann, so daß $1VI_1 I'_1 I''$ entsteht, darauf $1VI_1 I'_1 I'' I'''$, ...; (Sup'', a) liefert dann

$$(8') \quad \frac{1VI_1 I'_1 I''}{1VI_1 I'_1 I''} = \lim \{1VI_1 I'_1 I'', 1VI_1 I'_1 I'' I''', 1VI_1 I'_1 I'' I''' I'''', \dots\}.$$

Entsprechend bekommt man $1VI_1 I'_1 I'' I'''$ usf. Gemäß (Sup, b) mit $\Delta = 1$ und $[I_\Delta] = 1VI_1$ steigt man auf zu

$$(9) \quad \frac{1VI_{1+1}}{1VI_{1+1}} = \frac{1VI_2}{1VI_2} = \lim \{1VI_1, 1VI_1 I'_1, 1VI_1 I'_1 I''_1, \dots\}.$$

So wird man darauf geführt, im Supponenten von I (ebenso von I' , I'' , ...) weiter zu konstruieren, indem man unter anderem gemäß (Sup, c), (Sup', c), ... mittels der Definition $1V = \lim_n n$ [§ 1, (6)] die Limites

$$\frac{1VI}{1V} = \lim_n 1VI_n, \frac{1VI I'}{1V 1V} = \lim_n 1VI I'_n, \dots$$

bildet, dann gemäß (Sup, b) $1VI_{1V+1}$ erklärt usf. und überhaupt jede bereits erreichte Zahl als Supponent benützt. Man gelangt so auf Grund des III. Konstruktionsprinzips (§ 12, 2) zu dem Limes

$$(10) \quad \underline{1VI_{1V}} = \lim \{1VI_1, 1VI_{1V_1}, 1VI_{1VI_1}, \dots\},$$

bei dem erstmalig der Operant $\mathcal{V}$, und zwar gemäß (Sup, d), verwendet wird sowie zum erstenmal ein Fazient: $1\mathcal{V}$ (zugleich der einfachste Fazient) auftritt. [Rein formal könnten nämlich, wenn α die linke Seite von (10) bezeichnet, gemäß (Sup, c) und (Sup, d) auch die Figuren $\alpha_1 = 1VI_\alpha$, $\alpha_2 = 1VI_{\alpha_1}$ usw. gebildet werden.] — Entsprechend ergibt sich gemäß (Sup', d), wenn man $I_{1\mathcal{V}}$ als Operator 2. Stufe betrachtet:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1\mathcal{V}}} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1V_1}, 1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1VI_{1V_1}}, \\ 1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1V_1}}, \dots\}, \end{array} \right.$$

analog $1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1\mathcal{V}} I''_{1\mathcal{V}}$ usw. Dann läßt sich gemäß (Sup, b) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ die Zahl

$$(12) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1}} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}} I'_{1\mathcal{V}} I''_{1\mathcal{V}}, \dots\}$$

bilden, gemäß (Sup', b) die Zahl $1VI_{1\mathcal{V}+1} I'_{1\mathcal{V}+1}$ usf.

3. Die letzte Entwicklung leitet zur Konstruktion im Supponenten gemäß den Faz-Regeln über. Unter anderem ergibt sich nach (Faz, a):

$$(13) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1V}} = \lim_n 1VI_{1\mathcal{V}+n},$$

ebenso $1VI_{1\mathcal{V}+1V} I'_{1\mathcal{V}+1V}$ usw., desgleichen $1VI_{1\mathcal{V}+1VI}$ usf. Es ist z. B.

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1VI} I'} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}+1VI}, 1VI_{1\mathcal{V}+1VI} 1VI, \\ 1VI_{1\mathcal{V}+1VI} 1VI 1VI, \dots\}. \end{array} \right.$$

Gemäß (Faz, d) und (Faz, b) steigt man auf zu

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{1VI_{1\mathcal{V}(1+1)}} = \underline{1VI_{1\mathcal{V}2}} = 1VI_{1\mathcal{V}+1\mathcal{V}} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}+1}, \\ 1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1}}, 1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1}}}, \dots\} \end{array} \right.$$

[die gemäß (Faz, a) und (Faz, d) formal möglichen Gebilde $\alpha_1 = 1VI_{1\mathcal{V} + \alpha}$, $\alpha_2 = 1VI_{1\mathcal{V} + \alpha_1}$ usw. mit $\alpha = 1VI_{1\mathcal{V}^2}$ scheiden auf Grund des III. Konstruktionsprinzips aus], entsprechend zu $1VI_{1\mathcal{V}^2}^{I'}_{1\mathcal{V}^2}$ usw.

Nun kann man $1VI_{1\mathcal{V}^3} = 1VI_{1\mathcal{V}^2 + 1\mathcal{V}}$ bilden usw. und gemäß (Faz, c) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ den Limes

$$(16) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}1V}} = \lim_n 1VI_{1\mathcal{V}^n}$$

definieren. Darauf folgt $1VI_{1\mathcal{V}(1V+1)} = 1VI_{1\mathcal{V}1V+1\mathcal{V}}$ usw. Gemäß (Faz, e) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ und (Exp, a) mit $T = 1\mathcal{V}$, $U^1 = \mathcal{V}(\Delta = 1)$ ergibt sich der Limes

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1VI_{1\mathcal{V}^{1+1}}}{1VI_{1\mathcal{V}^2}} = \frac{1VI_{1\mathcal{V}^2}}{1VI_{(1\mathcal{V})\mathcal{V}}} = \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}}, \\ 1VI_{1\mathcal{V}1VI_{1\mathcal{V}}}, 1VI_{1\mathcal{V}1VI_{1\mathcal{V}1VI_{1\mathcal{V}}}}, \dots \}. \end{array} \right.$$

[Nach dem III. Konstruktionsprinzip sind die Figuren $\alpha_1 = 1VI_{1\mathcal{V}\alpha}$, $\alpha_2 = 1VI_{1\mathcal{V}\alpha_1}$ usw. mit $\alpha = 1VI_{1\mathcal{V}^2}$, obwohl sie formal richtig gemäß (Faz, c) und (Faz, e) gebildet sind, unzulässig.]

Nun bildet man

$1VI_{1\mathcal{V}^2+1}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}^2+1\mathcal{V}}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}^2^2}, 1VI_{1\mathcal{V}^2^2+1\mathcal{V}}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}^3}$,
analog $1VI_{1\mathcal{V}^3}^{I'}_{1\mathcal{V}^3}$ usw., dann $1VI_{1\mathcal{V}^3+1\mathcal{V}^2}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}^3^2}, \dots$,
 $1VI_{1\mathcal{V}^31V}, 1VI_{1\mathcal{V}^31V}^{I'}_{1\mathcal{V}^31V}, \dots$ und schließlich nach (Exp, b) die Limes.

$$(18) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}1V}} = \lim_n 1VI_{1\mathcal{V}^n},$$

$$(18') \quad \underline{1V(I_{1\mathcal{V}1V})^{I'}_{1\mathcal{V}1V}} = \lim_n 1V(I_{1\mathcal{V}1V})^{I'}_{1\mathcal{V}^n}$$

usf. Sodann kommt gemäß (Exp, a) und (Faz, e):

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1VI_{1\mathcal{V}1V+1}}{1VI_{(1\mathcal{V}1V)\mathcal{V}}} = \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}1V}, \\ 1VI_{1\mathcal{V}1V1VI_{1\mathcal{V}1V}}, 1VI_{1\mathcal{V}1V1VI_{1\mathcal{V}1V1VI_{1\mathcal{V}1V}}}, \dots \}. \end{array} \right.$$

Damit ist die Konstruktion im Exponenten von $\mathcal{V}$ eingeleitet, die fortzusetzen ist und gemäß dem III. Konstruktionsprinzip nach (Exp, c) mit dem Limes

$$(20) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}}1VI_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}}1VI_{1\mathcal{V}}1VI_{1\mathcal{V}}, \dots\}$$

aus dem Stadium der Zahlen- in das der Fazientenexponenten von $\mathcal{V}$ übergeht. Analog ergibt sich $1VI_{1\mathcal{V}}(1\mathcal{V})I'_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}$ usf.

Nun bildet man $\underline{1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}+1} = 1VI_{(1\mathcal{V})\mathcal{V}}1\mathcal{V}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}+1, \dots$, d.h. man macht im Exponenten von $\mathcal{V}$ die Fazientenkonstruktion; sie führt nach (Exp, c) (mit $U=\mathcal{V}$ und $[U]=1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}$) zu $1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}$. Setzt man $\Delta=1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}$, so fährt man fort mit $1VI_{1\mathcal{V}}\Delta+1, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}}\Delta_2, \dots$, $1VI_{1\mathcal{V}}\Delta\mathcal{V} = 1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}+1}, \dots$ und gelangt, wenn $\Delta_1=1\mathcal{V}^\Delta$ gesetzt wird, zu $1VI_{1\mathcal{V}}\Delta_1$. Analog ergibt sich $1VI_{1\mathcal{V}}\Delta_2$ mit $\Delta_2=1\mathcal{V}^{\Delta_1}$ usf.

4. Der Abschluß der letzten Entwicklung wird durch die erstmalige Anwendung von (It) vollzogen, bei der zum erstenmal das Symbol I als Operant fungiert; auf Grund des III. Konstruktionsprinzips kommt der Limes

$$(21) \quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}I}} = \lim \{1VI_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}, 1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}, \dots\},$$

wobei in (It) der Ausdruck ΔW mit $1\mathcal{V}$ und $[\Delta W]$ mit $1VI_{1\mathcal{V}}$ identifiziert wird. [Rein formal könnten gemäß (It) auch die Figuren $1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}I$, $1VI_{1\mathcal{V}}1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}I}$ usw. gebildet werden.]

Analog stellt man $1VI_{1\mathcal{V}I}I'$ her usw. Die Fazientenkonstruktion im Supponenten beginnt wieder von vorne und liefert $1VI_{1\mathcal{V}I+1}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}I2}, \dots, 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \dots, 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \dots$, dann gemäß (Exp, c) mit $U=\mathcal{V}$, $[U]=1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}$ den Limes

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}1\mathcal{V}} = \lim \{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \\ 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \dots\}, \end{array} \right.$$

hierauf mittels der Anwendung von (It) im Exponenten von $\mathcal{V}$ die Zahl $1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}$, womit der Weg zur Bildung des Limes

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1VI_{1(\mathcal{V}I)^{1+1}}}{1(\mathcal{V}I)^{1+1}} &= \frac{1VI_{1(\mathcal{V}I)^2}}{1(\mathcal{V}I)^2} = 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}I} \\ &= \lim \{ 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \\ &\quad 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \dots \} \end{aligned} \right.$$

gemäß (It) und (Exp, a) beschriftet wurde. Entsprechend ergibt sich $1VI_{1(\mathcal{V}I)^3}, \dots, 1VI_{1(\mathcal{V}I)} 1VI_{1\mathcal{V}I}, \dots, 1VI_{1(\mathcal{V}I)} 1\mathcal{V}, \dots, 1VI_{1(\mathcal{V}I)} 1\mathcal{V}I, \dots$ und abermals nach (It):

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1VI_{1\mathcal{V}I^{1+1}}}{1\mathcal{V}I^{1+1}} &= \frac{1VI_{1\mathcal{V}I^2}}{1\mathcal{V}I^2} = 1VI_{1(\mathcal{V}I)I} \\ &= \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}I}, 1VI_{1(\mathcal{V}I)} 1\mathcal{V}I, 1VI_{1(\mathcal{V}I)} 1(\mathcal{V}I) 1\mathcal{V}I, \dots \}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist $\mathcal{V}I$ als neuer Operant 1. Stufe behandelt worden. Behandelt man $\mathcal{V}I^2$ als solchen, so kommt analog zu (24) $1VI_{1\mathcal{V}I^3}$ usw., d. h. man gelangt zur Konstruktion im Exponenten des Operanten I . Diese führt zu den Zahlen $1VI_{1\mathcal{V}I} 1\mathcal{V}, \dots, 1VI_{1\mathcal{V}I} 1\mathcal{V}I$ usw. und wird „abgeschlossen“ gemäß (It') durch

$$(25) \quad \frac{1VI_{1\mathcal{V}II'}}{1\mathcal{V}II'} = \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}I}, 1VI_{1\mathcal{V}I} 1\mathcal{V}I, 1VI_{1\mathcal{V}I} 1\mathcal{V}I 1\mathcal{V}I, \dots \},$$

wobei I' zum erstenmal als Operant betätigt wird. Nun steigt man zu $1VI_{1\mathcal{V}II'I''}$ auf gemäß (It'') usw. und gelangt nach (Sup, a) mit $[I] = 1VI_{1\mathcal{V}I}$ zu dem Limes

$$(26) \quad \frac{1VI_{1\mathcal{V}I_1}}{1\mathcal{V}I_1} = \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}I}, 1VI_{1\mathcal{V}II'}, 1VI_{1\mathcal{V}II'I''}, \dots \}.$$

5. Mit der Zahl (26) ist diejenige Etappe in der Fazientenkonstruktion des Supponenten erreicht, bei der erstmalig ein mit Supponent versehener Operant auftritt: I_1 . — Eine analoge Konstruktion wie die gesamte bisherige führt zu $1VI_{1\mathcal{V}I_1}^{I'}$, dann zu $1VI_{1\mathcal{V}I_1}^{I'} 1\mathcal{V}I_1^{I''}$ usw. [gemäß (Sup', a), (Sup'', a) usw.]; nach (Sup, b) wird damit die Definition von

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1VI_{1\mathcal{V}I_1+1}}{1\mathcal{V}I_1+1} &= \lim \{ 1VI_{1\mathcal{V}I_1}, 1VI_{1\mathcal{V}I_1}^{I'} 1\mathcal{V}I_1, \\ &\quad 1VI_{1\mathcal{V}I_1}^{I'} 1\mathcal{V}I_1^{I''} 1\mathcal{V}I_1, \dots \} \end{aligned} \right.$$

ermöglicht (mit $\Delta = {}^1\mathcal{V}I_1$ und $[I_\Delta] = {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1}$), mit welcher die Konstruktion im Supponenten von vorne beginnt. Indem wir sie weiter verfolgen, bekommen wir die Zahlen

$${}^1VI_{{}^1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}}, {}^1VI_{{}^1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}I}, {}^1VI_{{}^1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}II'}, \dots, \\ {}^1VI_{{}^1(\mathcal{V}I_1)^2}, \dots, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1^2}, \dots, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'I''}, \dots,$$

und gemäß (Sup', a) den Limes

$$(28) \quad \frac{{}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'_1}} = \lim \{ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'I''}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'I'I'''}, \dots \}.$$

Analog kommt ${}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'_1I''_1}$ usw. Wir können dann (Sup, b) mit $\Delta = {}^1$, $[I_\Delta] = {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1}$ anwenden und gelangen zu

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{{}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{1+1}}} = \frac{{}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_2}} \\ \qquad \qquad \qquad = \lim \{ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'_1}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_1I'_1I''_1}, \dots \}. \end{array} \right.$$

Entsprechend ergibt sich ${}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_3}$ usf., d.h. wir treten in die Supponentenkonstruktion bezüglich der Operanten $I, I', I'', \dots$ ein. Diese bringt nunmehr die Zahlenfiguren

$${}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I''}, \dots, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''}, \\ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''I'''}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''I''''}, \dots, \\ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''I''''I'''''}, \dots, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''I''''I''''''}, \dots, \\ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}}I'I''I''''I''''''I'''''''}, \dots$$

hervor. — Gemäß (Sup, a) erreicht man den Limes

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{{}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}I_1}}} = \lim \{ {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}I}}, {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}I}I'}, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad {}^1VI_{{}^1\mathcal{V}I_{{}^1\mathcal{V}I}I'I''}, \dots \}; \end{array} \right.$$

mit ihm wiederholt sich die Supponentenkonstruktion bezüglich der Operanten $I, I', I'', \dots$ eine Stufe tiefer. Dieses „Tiefersteigen“ geht unbegrenzt weiter.

Als Grenzzahl des Algorithmus, die wir mit den bisherigen Regeln nicht mehr als reguläre Zahlenfigur definieren können, erscheint ein Limes

$$(31) \quad \Xi = \lim \{ {}^1VI_{{}^1V I_1}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I_1}}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I_{{}^1V I_1}}}, \dots \}.$$

§15. Ergänzende Bemerkungen zum Algorithmus der Zahlen $< \Xi$

1. Die Ausführungen dieses Paragraphen sind eine sinngemäße Übertragung der Bemerkungen von § 2, 3, welche sich auf den Algorithmus bis zu ${}^1VI_1$ hin bezogen und die m. m. durchaus auch für den Algorithmus bis zu Ξ hin zutreffen. Zunächst übernehmen wir den Begriff eines *Anfangs* einer Zahlenfigur wörtlich so, wie er im 1. Absatz von § 2, 3 erklärt wurde, wobei wir jetzt unter einem „Schreibakt“ das Hinschreiben eines Einzelzeichens (2) (§ 12) verstehen. Diese Erklärung ist für alle vollständigen, allein aus den Zeichen (2), d. h. ohne das Zeichen $\lim$, gebildeten Zahlenfiguren sinnvoll, ob sie nun regulär sind oder Hilfsfiguren (vgl. § 2, 3, 7. Absatz). — Wenn man die Reihe der Anfänge einer Zahlenfigur aufschreibt, entstehen zugleich die Anfänge ihrer einzelnen Teilfiguren, wie Exponenten, Supponenten, Koeffizienten, Operatoren, Operanten und Fazienten. — Unter dem *letzten Anfang* einer Figur verstehen wir diese selbst; ihre übrigen Anfänge nennen wir *echt*. *Echte Anfänge sind stets vollregulär*. — Zur Erläuterung vorstehender Bemerkungen diene folgendes

Beispiel: $1, {}^1V, {}^1VI, {}^1VI_1, {}^1VI_{{}^1V}, {}^1VI_{{}^1V I}, {}^1VI_{{}^1V I_1}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V}},$
 ${}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I}}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I_{{}^1V}}}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I_{{}^1V I}}}, {}^1VI_{{}^1V I_{{}^1V I_{{}^1V I_{{}^1V}}}} I.$ — Setzen wir

zur Abkürzung ${}^1V I_{{}^1V} = \Delta, {}^1V {}^1V = \xi$, so ist die letzte — vollreguläre — Zahlenfigur gleich ${}^1(VI_{\Delta\xi})I$ und die ihr vorangehenden Zahlenfiguren bilden die komplette Reihe ihrer echten Anfänge.

Wichtig für die Klassifikation der (vollregulären) Zahlenfiguren $\geq {}^1VI_{{}^1V I_1}$ sind ihre Anfänge Ξ_n , wobei wir mit Ξ_n das n -te Glied der Limesreihe in (31) rechts bezeichnen. Wir nennen Ξ_n eine n -stufige $\mathcal{V}$ -Spitze. Für jede vollständige Zahlenfigur $\zeta \geq {}^1VI_{{}^1V I_1}$ ohne $\lim$ gibt es einen größten Anfang Ξ_n (d. h. mit größtem n), den wir die $\mathcal{V}$ -Spitze von ζ nennen; er ist zugleich die $\mathcal{V}$ -Spitze aller zu ζ gleichen Zahlenfiguren ohne $\lim$.

Hinsichtlich der Anfänge von Hilfsfiguren gilt auch jetzt noch das in § 2, 3 gesagte; wir wollen es ausführlicher formulieren in Form eines Satzes:

Satz 1. Es sei $\underline{\lambda} = \lambda_m = \lambda_{m-1} = \dots = \lambda_2 = \lim_p \alpha_p$, wobei die λ_i die Reihe der vollständigen Hilfsfiguren ohne $\lim$ für die vollreguläre Zahlenfigur λ bilden; dann ist der vorletzte Anfang von λ ein Anfang von λ_m und allgemein der vorletzte Anfang von λ_{i+1} ein Anfang von λ_i , während die Umkehrung nicht zu gelten braucht.

Beispiel: $\lambda = 1VI_{1(VI^2)^2 2}^2$, $\lambda_5 = 1(VI_{1(VI^2)^2 2})I_{1(VI^2)^2 2}$,

$$\lambda_4 = 1(VI_{1(VI^2)^2 2})I_{1(VI^2)^2 + 1(VI^2)^2},$$

$$\lambda_3 = 1(VI_{1(VI^2)^2 2})I_{1(VI^2)^2 + (1VI^2)VI^2},$$

$$\lambda_2 = 1(VI_{1(VI^2)^2 2})I_{1(VI^2)^2 + (1VI^2)(VI)I}.$$

Denkt man sich überall 2 durch $1+1$ ersetzt, so erkennt man die Richtigkeit der obigen Behauptung in diesem speziellen Fall, und zugleich sieht man, daß λ_2 und λ_3 gleich viele Anfänge haben, λ_3 aber mehr Anfänge hat als λ_4 , λ_4 mehr als λ_5 und λ_5 mehr als λ .

Von der allgemeinen Richtigkeit des Satzes 1 überzeugt man sich so: Die Umwandlung einer Hilfsfigur λ_i ($i \geq 2$) in die nächste λ_{i+1} oder, wenn $i=m$, in λ , erfolgt an Hand eines der „Verwandlungs-Schemata“ ($\mathfrak{U}, 1$), ($\mathfrak{D}_n, a$) ($n=1, 2, 3, \dots$), (Faz, b), (Exp, a) (§ 1, 5 und § 13), indem wir es unter Umständen auch auf eine Teilfigur (die Zahlenfigur ist) anwenden. Die Schemata ($\mathfrak{U}, 1$) bzw. ($\mathfrak{D}_n, a$) können wir miteinfassen im Schema (Faz, b) bzw. (Exp, a), wenn Δ in (Faz, b) auch eine Zahl bzw. T und U in (Exp, a) auch Operatoren oder T auch eine Zahl > 1 bedeuten dürfen [wobei in den Fällen ($\mathfrak{U}, 1$) und ($\mathfrak{D}_1, a$) die eckigen Klammern $[\]$ wegzulassen sind]. Also hat λ_i entweder die Form (vgl. § 13, 1, Schluß) $\langle \Delta \xi + \Delta \rangle$ oder $\langle (TU^d)U \rangle$ und λ_{i+1} bzw. λ die Form $\langle \Delta(\xi + 1) \rangle$ oder $\langle TU^{d+1} \rangle$. Der vorletzte Anfang von λ_{i+1} bzw. λ ist dann jeweils $\langle \Delta \xi \rangle$ oder $\langle TU^d \rangle$, also immer ein Anfang von λ_i .

Den Inhalt des 8. Absatzes von § 2, 3 fixieren wir in dem

Satz 2. Ist α eine vollständige Zahlenfigur ohne $\lim$ und ξ, ξ_1 ein Paar sukzessiver Anfänge von α , so haben alle vollständigen Zahlenfiguren β ohne $\lim$ mit $\xi < \beta < \xi_1$ ebenfalls ξ zum Anfang.

Denn es gilt $\xi < \xi_1$ mit vollregulärem ξ . ξ_1 entsteht aus ξ , indem man rechts von ξ — eventuell unter Einschließung von ξ oder einer Teilfigur von ξ in $()$ — entweder eines der Zeichen $V, \mathcal{V}, I, I', I'', \dots$ als Operator bzw. Operant oder das Zeichen 1 als Supponent oder eine der Zeichenkombinationen $1+1, 1V, 1\mathcal{V}$ als Exponent oder die Kombination $+1$ additiv oder die Kombination $(1+1)$ oder $1V$ multiplikativ hinzufügt. (Diese Anfügungen brauchen sich natürlich nicht auf die Grundzeile von ξ zu beziehen!) Wie unsere Ableitungsregeln erkennen lassen, enthält dann jedes Zwischenstadium β der Ableitung von ξ_1 aus ξ , sofern β eine vollständige Zahlenfigur

ohne $\lim$ ist, entweder ξ selbst oder eine aus ξ durch Verwendung von Klammern entstehende Figur als Initial-Teilfigur. Das aber besagt, daß ξ ein Anfang von β ist.

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 haben sogar alle vollständigen Zahlenfiguren β ohne $\lim$ mit $\xi < \beta < \alpha$ den Anfang ξ .

Für $\beta < \xi_1$ folgt dies aus Satz 2, desgleichen, wenn $\alpha \text{ id } \xi_1$. Ist $\xi_1 < \alpha$, so sei $\xi_1, \dots, \xi_p$ die Reihe der Anfänge von α ab ξ_1 (also $\alpha \text{ id } \xi_p$). Wenn $\beta = \xi_1$ bzw. $= \xi_i$ ($2 \leq i \leq p-1$), so hat β nach Satz 1 den Anfang ξ bzw. ξ_{i-1} (die $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ sind ja vollregulär), also jedenfalls den Anfang ξ . Wenn $\xi_{i-1} < \beta < \xi_i$ ($2 \leq i \leq p$), so hat β nach Satz 2 den Anfang ξ_{i-1} , also auch den Anfang ξ .

2. Auch die Ausführungen von § 2, 3 bezüglich der Vergleichung zweier vollregulärer Zahlenfiguren übertragen sich m. m., wobei zu beachten ist, daß alle Zahlenfiguren, die den Anfang $1VI$ haben, größer sind als alle, die ihn nicht haben, und daß $\alpha < \beta$ gilt, wenn die $\mathcal{V}$ -Spitze von β größer ist als die von α . Letztere Bemerkung gilt überhaupt, wenn α und β vollständige Zahlenfiguren ohne $\lim$ sind. Desgleichen gilt folgender Satz, welcher das Vergleichsrezept von § 2, 3 etwas verallgemeinert:

Satz 4. Seien $\eta \neq \eta'$ zwei vollständige Zahlenfiguren ohne $\lim$ und $\xi_1, \dots, \xi_m$ sowie $\xi'_1, \dots, \xi'_{m'}$ die Reihen ihrer Anfänge (also $\xi_1 \text{ id } \xi'_1 = 1$, $\xi_m \text{ id } \eta$, $\xi'_{m'} \text{ id } \eta'$). Dann sind genau drei Fälle möglich. 1. η ist ein echter Anfang von η' oder Hilfsfigur eines solchen. 2. Dasselbe mit Vertauschung von η und η' . 3. Es gibt ein $j \leq \min(m, m')$, so daß $\xi_i \text{ id } \xi'_i$ für $i < j$ und $\eta' \neq \xi_j \neq \xi'_j \neq \eta$ ist. — Im ersten Fall ist $\eta < \eta'$, im zweiten $\eta > \eta'$ und im dritten gilt $\eta <$ oder $> \eta'$, je nachdem $\xi_j <$ oder $> \xi'_j$ ist.

Die beiden ersten Fälle sind trivial. Daß der dritte Fall zu ihnen disjunkt ist, folgt so. Nach Voraussetzung kann nicht $\xi_i \text{ id } \xi'_i$ sein für alle $i \leq \min(m, m')$, wenn zugleich die beiden ersten Fälle ausgeschlossen sein sollen; also gibt es ein j mit $2 \leq j \leq \min(m, m')$, so daß $\xi_i \text{ id } \xi'_i$ für $i < j$ und $\xi_j \text{ non id } \xi'_j$ ist. Dann ist aber auch $\xi_j \neq \xi'_j$; das ist klar, wenn $j = m$ oder $j = m'$, und wenn $j < \min(m, m')$, so folgt es aus dem Umstand, daß dann ξ_j und ξ'_j vollregulär sind. — Im dritten Fall sind ξ_{j-1} und ξ'_{j-1} vollregulär und identisch, d. h. ξ_{j-1} ist der vorletzte Anfang von ξ_j und ξ'_j . Es gibt nur endlich viele Zahlenfiguren, von denen ξ_{j-1} der vorletzte Anfang ist; für je zwei von ihnen kann man auf Grund ihrer Ableitung aus ξ_{j-1} feststellen, in welcher der Relationen $<, =, >$ sie zueinander stehen. Sei etwa $\xi_j < \xi'_j$ festgestellt (die Gleichheit scheidet ja aus). Wenn $j = m$, so folgt $\eta < \xi'_j \leq \eta'$. Wenn $j < m$, so ist $\xi_j < \eta$ und alle Zahlen zwischen ξ_j und η haben nach Satz 3 den Anfang ξ_j ; ξ'_j gehört demnach nicht zu ihnen; wegen $\eta \neq \xi'_j$ muß also wieder $\eta < \xi'_j \leq \eta'$ sein.

Hat man zwei Zahlenfiguren zu vergleichen, so ist es unter Umständen vorteilhaft, sie durch ihre zweiten Hilfsfiguren zu ersetzen, soweit dies möglich ist bzw. sie nicht bereits solche sind. Denn die Reihe ihrer identischen Anfänge wird damit eventuell verlängert und die Vergleichung der ersten nicht identischen Anfänge erleichtert. — Beispiel: Die echten Anfänge von $1(VI)^{1+1}$

sind $1, 1V, 1VI$; die von $(1VI)I^{1+1}$ sind $1, 1V, 1VI, (1VI)V$. Die letzteren sind aber auch die echten Anfänge von $(1VI)I$ und $((1VI)V)V$.

3. Was in § 2, 3 über die Angabe eines $\alpha_m > \beta$ zu einem $\beta < \underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$ gesagt wurde, bleibt bei sinngemäßer Ergänzung ebenfalls gültig. Wir wollen aber den Sachverhalt noch etwas eingehender behandeln und überzeugen uns zunächst davon, daß folgender Satz gilt:

Satz 5. Sei $\underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$ im Sinn des Algorithmus; λ und die α_n seien in vollständiger Form geschrieben. Dann ist α_1 der vorletzte Anfang entweder der zweiten Hilfsfigur für λ oder, wenn es eine solche nicht gibt, von λ selbst. — α_n ist stets ein Anfang von α_{n+1} .

Jede Limesbildung geht nämlich zurück auf eines der „produktiven“ Schemata § 1: (6), ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{B}^{(n)}$) oder § 13: (Sup, a), (Sup⁽ⁿ⁾, a), (Sup, b), (Sup⁽ⁿ⁾, b), (Sup, d), (Sup⁽ⁿ⁾, d), (Faz, d), (Faz, e), (Exp, c), (It), (It⁽ⁿ⁾) ($n = 1, 2, 3, \dots$), wobei diese Schemata auch auf Teilfiguren einer Zahlenfigur anzuwenden sind, nämlich gemäß den Rekursionsschemata § 1: ($\mathfrak{A}$, 2), ($\mathfrak{D}_n$, b) und § 13: (Sup, c), (Sup⁽ⁿ⁾, c), (Faz, a), (Faz, c), (Exp, b), unter Beachtung des Umstandes, daß die i -te ($i \geq 2$) Hilfsfigur der zu $\langle \lambda \rangle$ gleichen regulären Zahlenfigur durch $\langle \lambda_i \rangle$ dargestellt wird, wenn λ_i die i -te Hilfsfigur des regulären λ ist. Bedeutet daher $\varrho = \lim \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots\}$ eines der zu Anfang dieses Absatzes zitierten „produktiven“ Schemata, so läßt sich jede Limesbildung in der Form schreiben:

$$(32) \quad \langle \varrho \rangle = \lim \{ \langle \sigma_1 \rangle, \langle \sigma_2 \rangle, \langle \sigma_3 \rangle, \dots \}.$$

Die linke Seite von (32) ist nun entweder zweite Hilfsfigur oder regulär; die Glieder in $\{ \}$ sind stets regulär. Auf Grund von (32) und dem Anblick der „produktiven“ Schemata folgt aber der Satz 5 unmittelbar, sobald wir uns alle Zahlenfiguren in vollständiger Form denken.

Satz 6. Sei unter den Voraussetzungen von Satz 5 mit β eine vollreguläre Zahlenfigur $< \lambda$ bezeichnet. Dann ist entweder $\beta < \alpha_1$ oder es gibt ein größtes m , so daß α_m ein Anfang von β ist, und dann gilt $\alpha_m \leq \beta < \alpha_{m+1}$.

Da $\beta < \lambda$, so muß eine der Relationen $\beta < \alpha_1$ oder $\alpha_m \leq \beta < \alpha_{m+1}$ bestehen. Im letzten Fall ist aber nach Satz 3 (bzw. wegen der Regularität von β) α_m ein Anfang von β , α_{m+1} jedoch nicht mehr. — Da β eine endliche Figur ist, läßt sich die Zahl m ohne weiteres finden.

Satz 7. Ist $\underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$, $\underline{\mu} = \lim_n \beta_n$ und gilt $\alpha_i < \mu \leq \alpha_{i+1}$, so ist $\alpha_i \leq \beta_1$, und zwar genauer α_i ein Anfang von β_1 .

Denn nach Satz 3 und Satz 5 ist α_i ein Anfang von μ , also ein Anfang des vorletzten Anfangs sowohl von μ als auch, wenn sie existiert, der zweiten Hilfsfigur für μ (Satz 1); wiederum nach Satz 5 ist daher α_i ein Anfang von β_1 .

Der Algorithmus erfüllt also hinsichtlich der Definition der Fundamentalfolgen für seine Limeszahlen die von H. BACHMANN⁷⁾ erwähnte Nebenbedingung. Es ist nicht vorstellbar, wie der Algorithmus bei beliebiger

Fortsetzung, sofern sie nach den bisherigen Grundsätzen weitergeht (von denen abzuweichen kein Anlaß sichtbar ist), jemals gezwungen sein sollte, gegen diese Bedingung zu verstoßen. Andererseits hat H. BACHMANN [a. a. O.⁷⁾, Schluß] gezeigt, daß diese Bedingung nicht eingehalten werden kann, wenn man sich für *alle* Limeszahlen der zweiten Zahlenklasse die Fundamentalfolgen definiert denkt. Diese Bemerkung illustriert die Kluft zwischen der „konstruktiven“ zweiten Zahlenklasse und der zweiten Zahlenklasse „an sich“.

4. Wie in § 2, 4 überzeugt man sich, daß auch für den in diesem Abschnitt weitergeführten Algorithmus die Forderungen von CHURCH und KLEENE erfüllt sind; man hat die dortigen Ausführungen lediglich durch den Hinweis auf § 14 und § 15, 2 zu ergänzen.

Nun wollen wir durch Beispiele belegen, daß Klammerregeln wie die von § 13, 6 nicht entbehrt werden können, wobei nicht verschwiegen sei, daß die dortigen Klammerregeln vom theoretischen Standpunkt aus keine bestmöglichen sind; denn sie sind wohl hinreichend, um Zweideutigkeiten auszuschalten, aber nicht in jedem einzelnen Falle notwendig zu diesem Zweck. Sie müßten also durch „feinere“ Regeln ersetzt werden, wenn man „überflüssige“ Klammersetzungen vermeiden wollte. Dazu müßte man aber näher auf die „Topologie“ der Zahlenfiguren eingehen, wobei vorauszusehen ist, daß die dann resultierenden Klammerregeln noch komplizierter ausfallen. Ein Rest von Willkür würde übrigens auch dann noch bleiben. Andererseits erleichtern die Klammern das „Lesen“ der Zahlenfiguren im allgemeinen auch dann, wenn sie im Grunde überflüssig sind, so daß es geraten erscheint, sich hier mit einem Kompromiß zu begnügen.

Wir bringen die Beispiele in der Reihenfolge der Regeln von § 13, 6.

$$1. \quad {}^1VI_{{}_1V}({}_1V+1) > {}^1VI_{{}_1V}{}_1V+1.$$

$$2. \text{ a) } {}^1VI_{{}_1V}{}_1V2 > ({}^1VI_{{}_1V}{}_1V)2,$$

$$\text{ b) } {}^1VI_{{}_1V}{}_1V{}_1V > {}^1VI_{{}_1V}({}_1V{}_1V){}_1V,$$

$$\text{ c) } {}^1VI_{{}_1V}{}_1V{}_1V > {}^1VI_{{}_1V}({}_1V{}_1V){}_1V.$$

$$3. \quad {}^1VI_{{}_1V}{}_1V+1 > ({}^1VI_{{}_1V}{}_1V)+1.$$

$$4. \text{ a) } {}^1VI_{{}_1V}({}_1V)V > ({}^1VI_{{}_1V}{}_1V)V,$$

$$\text{ b) } {}^1VI_{{}_1V}{}_1V({}_1V)V > {}^1VI_{{}_1V}({}_1V{}_1V)V.$$

⁷⁾ Normalfunktionen und Hauptfolgen. Comm. Math. Helv. 28, 9—16 (1954).

$$\begin{aligned}
 5. \text{ a) } & 1VI_{1VI} 1VI 1VI 1VI 1V > 1VI_{1VI} 1VI (1VI 1VI) 1V > \\
 & > 1VI_{1VI} 1(VI 1VI 1VI) 1V > 1V (I_{1VI} 1VI 1VI) 1V > \\
 & > 1(VI_{1VI} 1VI 1VI) 1V, \\
 \text{ b) } & 1VI_{1V} 1VI I' > 1V (I_{1V} 1VI) I' > 1(VI_{1V} 1V) I I'.
 \end{aligned}$$

5. Von einem konstruktiven Verfahren ist zu verlangen, daß es „zirkelfrei“ ist. Für den konstruktiven Algorithmus bedeutet dies unter anderem, daß diejenigen in einer Zahlenfigur ζ (ohne lim) auftretenden Teilfiguren, die selbst Zahlenfiguren sind, kleiner als ζ zu sein haben. Das ist in der Tat der Fall, wie die Entwicklungen in § 14 erkennen lassen. Denn wenn die Zahlenfigur ζ die Zahlenfigur α als Teilfigur enthält, so bedeutet dies, daß ζ unter Zuhilfenahme der Konstruktion von α zu bilden ist, also ζ nicht ohne Kenntnis von α erklärt werden kann, während α ohne Kenntnis von ζ gewonnen werden mußte. Folglich kann α nicht aus ζ abgeleitet werden und daher muß ζ aus α ableitbar sein; da wir α als regulär ansehen können, so folgt daraus $\alpha < \zeta$.

Mit Rücksicht auf ein ähnliches Problem im „freien“ Algorithmus (siehe Vorbemerkung) wollen wir uns nun auch explizit vom Zustandekommen dieses Sachverhalts überzeugen. Es genügt dabei, reguläre Zahlenfiguren ζ zu betrachten. Hat man ζ konstruiert, so ist damit festgestellt, daß ζ die Form (3) (§ 12) hat. Wenn also α einer der Summanden von (3) ist, muß $\alpha < \zeta$ sein. Wir können daher annehmen, daß α in einem Exponenten oder Supponenten vorkommt. Ferner genügt es, anzunehmen, daß α nicht Teil einer Zahlenfigur ist, die ihrerseits Teil aber kein Anfang von ζ ist. Wir sagen dann, α sei eine *maximale* Zahlenfigur innerhalb ζ . Unter diesen Voraussetzungen ist α entweder Exponent oder Supponent oder Koeffizient eines Fazienten oder letzter Summand eines Fazienten [vgl. § 12, (4)].

Entsprechend den genannten vier Möglichkeiten hat ζ einen Anfang $[U^\alpha]$ bzw. $[U_\alpha]$ bzw. $[\Delta\alpha]$ bzw. $[\Delta + \alpha]$; im ersten Fall ist U ein Operator oder Operant, im zweiten ein Symbol I oder $I^{(n)}$ (wenn U bzw. U_α ein Operator ist, fällt die Grundzeile von U in die von ζ). Im zweiten und dritten Fall ist Δ ein Fazient. $[U]$ bzw. $[U_1]$ bzw. $[\Delta]$ bzw. $[\Delta + 1]$ ist ein Anfang von $[U^\alpha]$ bzw. $[U_\alpha]$ bzw. $[\Delta\alpha]$ bzw. $[\Delta + \alpha]$. (Es soll $[U] \rightarrow [U^\alpha]$ usw. gelten; vgl. § 13, 1.) — Nun fragt es sich, ob man von diesem Anfang aus die „lokale“ Konstruktion an dem durch die Stellung von α bestimmten Orte „unbeschränkt“ fortführen, d.h. die Folge $[U]$, $[U^{[U]}]$, $[U^{[U^{[U]}]}]$, ... bzw.

$[U_1]$, $[U_{[U_1]}]$, $[U_{[U_{[U_1]}]}]$, ... bzw. $[\Delta]$, $[\Delta[\Delta]]$, $[\Delta[\Delta[\Delta]]]$, ... bzw. $[\Delta + 1]$, $[\Delta + [\Delta + 1]]$, $[\Delta + [\Delta + [\Delta + 1]]]$, ... bilden kann oder nicht.

Ist unbeschränkte Konstruktion möglich, so wird sie abgeschlossen mit $[UI]$ oder $[UI^{(n)}]$ (wenn U ein Operator 1. oder $(n+1)$. Stufe ist) oder $[U^{1\mathcal{V}}]$ (wenn U ein Operant) bzw. $[U_{1\mathcal{V}}]$ bzw. $[\Delta\mathcal{V}]$ bzw. $[\Delta + 1\mathcal{V}]$, wobei nach dem III. Konstruktionsprinzip der Abschluß eindeutig ist (denn Figuren wie $[U^{[UI]}]$ oder $[U^{[U^{1\mathcal{V}}]}]$ bzw. $[U_{[U_{1\mathcal{V}}]}]$ bzw. $[\Delta[\Delta\mathcal{V}]]$ bzw. $[\Delta + [\Delta + 1\mathcal{V}]]$

usw. sind nicht zugelassen). — Sei ξ die durch den Abschluß bestimmte reguläre Zahlenfigur. Dann dürfen die Zahlenfiguren $[U^\gamma]$ bzw. $[U_\gamma]$ bzw. $[\Delta\gamma]$ bzw. $[\Delta + \gamma]$ genau dann gebildet werden, wenn $1 \leq \gamma < \xi$ ist. Bezeichnen wir diese Zahlenfiguren mit $\eta(\gamma)$, so gilt stets $\gamma < \eta(\gamma)$. Für $\gamma = 1$ ist dies klar. Für die übrigen γ zeigen wir es bezüglich $\eta(\gamma) = [\Delta\gamma]$ (in den anderen Fällen verfährt man analog). Wenn $1 < \gamma \leq [\Delta]$, so wird $[\Delta] < [\Delta\gamma]$; wenn $[\Delta] < \gamma \leq [\Delta[\Delta]]$, so wird $[\Delta[\Delta]] < [\Delta\gamma]$ usw. Also ist stets $\gamma < [\Delta\gamma]$. — In sämtlichen Fällen muß aber α eines der genannten γ sein, d.h. es gilt $\alpha < \eta(\alpha) \leq \xi$.

Ist die unbeschränkte Konstruktion unmöglich, so kann dies nur dadurch eintreten, daß die bei Erreichung eines gewissen β entstehende Zahlenfigur $[U^\beta]$ bzw. $[U_\beta]$ bzw. $[\Delta\beta]$ bzw. $[\Delta + \beta]$, die wir wieder summarisch mit $\eta(\beta)$ bezeichnen, entweder eine Zahlenfigur ξ von einer der Formen $(\partial W^\partial)W$, $[I^\mu + I]^*$, $[(TX^\partial)X]^*$, $[I_1 I_1']^*$, $[I_1^{(n)} I_1'^{(n-1)}]^*$ wird oder ein echter Anfang eines solchen ξ . (Hinsichtlich $[\]^*$ s. § 13, 1, 1. Absatz.) Die drei ersten Formen sind Hilfsfiguren (vgl. die Verabredung in § 15, 1 zum Beweis von Satz 1); die beiden letzten können es ebenfalls sein, sollen aber nur dann in Betracht gezogen werden, wenn sie regulär sind (denn andernfalls lassen sie sich in einer der drei ersten Formen darstellen). In jedem Fall muß dabei entweder U^β bzw. U_β bzw. $\Delta\beta$ bzw. $\Delta + \beta$ jeweils als Teilfigur in W , I , X , Δ auftreten (eventuell kann $\Delta\beta$ bzw. $\Delta + \beta$ id Δ sein) oder, was nur für $\eta(\beta)$ id $[U_\beta]$ id ξ geschehen kann, es muß U_β jeweils mit W , X , I_1 , $I_1'^{(n+1)}$ identisch sein. Daher kann auf Grund der Konstruktionsprinzipien I bis III die Zahlenfigur $\eta(\gamma)$ nur für $\gamma \leq \beta$ gebildet werden, d.h. es gilt $\alpha \leq \beta$ [da $\eta(\alpha)$ schon gebildet war]. Ferner muß jeweils ∂W^∂ , $[I^\mu]^*$, $[TX^\partial]^*$, $[I_1]^*$, $[I_1'^{(n)}]^*$ ein Anfang von $\eta(\alpha)$ sein, d.h. in $\eta(\alpha)$, somit auch in ξ , kommt β links von α als innerhalb ξ maximale Teilfigur vor. — Wir können also unsere Betrachtung für β wiederholen. — Dieses Fortschreiten nach links muß aber einmal enden mit dem Fall einer unbeschränkt möglichen „lokalen“ Konstruktion, und zwar spätestens bei der am weitesten links stehenden innerhalb ξ maximalen Zahlenfigur.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. September 1955)

Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen

Von

OSKAR HERRMANN

Ist ein total-reeller algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ des Grades n und eine ganze Zahl $k > 1$ gegeben, so ist bekanntlich jede Spitzenform zur HILBERTSchen Modulgruppe bezüglich $\mathfrak{K}$ von der Dimension $-k$ als ein lineares Kompositum gewisser (endlich vieler) POINCARÉscher Reihen darstellbar [1], [2]. Der sehr komplizierte Bau dieser POINCARÉschen Reihen läßt im allgemeinen nicht erkennen, ob eine solche Reihe identisch verschwindet oder nicht. Noch schwieriger dürfte es sein, die linearen Relationen aufzustellen, die innerhalb eines vorgelegten Systems von POINCARÉschen Reihen bestehen. Da eine geeignete Verallgemeinerung des RIEMANN-ROCHSchen Satzes nicht bekannt ist, hat man auch keine Möglichkeit, sich auf diesem Wege eine Aussage über den Rang der Schar der Spitzenformen zu verschaffen.

In den vorliegenden Untersuchungen wird mit Hilfe numerischer Abschätzungen der FOURIER-Koeffizienten geeigneter POINCARÉscher Reihen gezeigt, daß diese nicht identisch verschwinden, bzw. linear unabhängig sind. Die Betrachtung beschränkt sich nicht auf die gewöhnliche HILBERTSche Modulgruppe, sondern erstreckt sich auch auf die den absoluten Idealklassen des Grundkörpers zugeordneten Gruppen, die, wie sich bei der Begründung der Theorie der T -Operatoren gezeigt hat [3], gleichberechtigt neben der HILBERTSchen Modulgruppe stehen. Auch für diese Gruppen hat GUNDLACH [4] die POINCARÉschen Reihen untersucht. Beim Vergleich der zitierten Arbeiten mit den vorliegenden Untersuchungen ist auf die jeweiligen Änderungen der Bezeichnungen zu achten. Diese Änderungen waren erforderlich um den Formelapparat möglichst einfach zu gestalten.

Der Einfachheit halber wird $\mathfrak{K}$ als reell-quadratisch und $k > 2$ vorausgesetzt. d sei die Diskriminante von $\mathfrak{K}$. Nach genauer Definition der den einzelnen Idealklassen von $\mathfrak{K}$ zugeordneten Gruppen, werden die POINCARÉschen Reihen aufgestellt und deren FOURIER-Koeffizienten berechnet. Hierbei wird weitgehend auf die Resultate von GUNDLACH [4] zurückgegriffen. Es zeigt sich, daß die FOURIER-Koeffizienten numerisch sehr scharf eingegrenzt werden können, woraus sich zunächst das nicht-identische Verschwinden gewisser POINCARÉscher Reihen ergibt. Darüber hinaus wird mit einer sehr elementaren Schlußweise sogar die lineare Unabhängigkeit gewisser Systeme von POINCARÉschen Reihen bewiesen. Hieraus ergibt sich eine asymptotische Abschätzung des Ranges der Schar aller Spitzenformen der Dimension $-k$ zu der gegebenen Gruppe. Diese Abschätzung steht im Einklang mit einer

von HERVÉ [5] für den Fall der hyperabelschen Substitutionengruppe mit kompaktem Fundamentalbereich hergeleiteten Aussage. Falls es möglich ist, daß man die Beweise von HERVÉ auf die HILBERTSche Modulgruppe überträgt, bedeuten die vorliegenden Untersuchungen eine Abschätzung der hierbei auftretenden Konstanten¹⁾.

Die Durchführung dieser Methode erweist sich als besonders einfach, wenn man sich auf den Fall der gewöhnlichen HILBERTSchen Modulgruppe beschränkt und die Spitzenformen in dem Gebiet $\Im m \frac{\tau}{\sqrt{d}} > 0$ betrachtet.

Hier kann man ohne Schwierigkeit diejenigen Paare $(d, -k)$ aufzählen, für die mit der gegebenen Methode die Existenz einer Spitzenform nicht bewiesen werden kann. Ferner wurde in diesem Spezialfall eine für alle k gültige Abschätzung des Ranges der Schar der Spitzenformen hergeleitet.

Zuletzt werden zwei Ergänzungen der beiden Hauptsätze ohne Beweis angegeben.

Es sei d die Diskriminante des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathfrak{K} = R(\sqrt{d})$ mit der Klassenzahl h . Ist $\alpha \neq (0)$ irgendein Ideal aus $\mathfrak{K}$, dann ist α^{2h} das Quadrat eines Hauptideals und besitzt eine total-positive Erzeugende $\tilde{\omega}$. Also kann $\omega = \sqrt[2h]{\tilde{\omega}}$ in beiden Konjugierten reell und positiv gewählt werden. Die Menge der Produkte $\alpha\omega$ mit $\alpha \in \mathfrak{K}$ werde mit $\mathfrak{K}_\omega$ bezeichnet; entsprechend ist $\mathfrak{K}_{\omega^{-1}}$ definiert. $\alpha\omega$ heißt ganz, wenn das Ideal α ganz ist. Γ_ω sei die Menge aller Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{lll} \alpha \in \mathfrak{K}, & \beta \in \mathfrak{K}_{\omega^{-1}}, & \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ \gamma \in \mathfrak{K}_\omega, & \delta \in \mathfrak{K}, & \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganz.} \end{array}$$

Da diese Konstruktion für die beiden Konjugierten simultan durchgeführt werden kann, können wir Γ_ω eine hyperabelsche Substitutionsgruppe $\bar{\Gamma}_\omega$ zuordnen. Offenbar unterscheiden sich diese Gruppen nur durch eine einfache Transformation von den Gruppen $\Gamma_1(\mathfrak{K}_a)$ in [3] oder von den Gruppen $\bar{\Gamma}(1, a)$ in [4]. Die Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ ist die gewöhnliche HILBERTSche Modulgruppe.

Die FOURIER-Reihe einer ganzen Spitzenform $F(\tau)$ zur Gruppe Γ_ω in einem der Diskontinuitätsgebiete von der Dimension $-k$ läßt sich in der Form

$$F(\tau) = \sum_v c(v) e\left(\frac{v\tau}{\sqrt{d}}\right) \quad \text{mit} \quad e(x) = e^{2\pi i S x}$$

schreiben. Hierbei wird über alle ganzen $v \in \mathfrak{K}_\omega$, die der Bedingung $\Im m \frac{v\tau}{\sqrt{d}} > 0$ genügen, summiert. Dementsprechend gehört zu jeder ganzen Zahl μ , die diesen Bedingungen genügt, eine POINCARÉsche Reihe

$$(1) \quad G_\mu(\tau; d, \omega, -k) = \sum_{(\gamma, \delta)} \sum_{\lambda} N(\gamma\tau + \delta)^{-k} e\left(\frac{\mu \lambda^2 M \tau}{\sqrt{d}}\right).$$

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur: Nach mündlicher Mitteilung von Herrn GUNDLACH soll eine solche Übertragung möglich sein.

Hierbei wird über ein Repräsentantensystem der Klassen (im weitesten Sinne) assoziierter zweiter Zeilen (γ, δ) von Matrizen aus Γ_ω bzw. über ein Halbsystem der Einheiten λ — d.h. von je zwei Einheiten $\lambda, -\lambda$ wähle man einen Repräsentanten — summiert. M ist eine Matrix mit der zweiten Zeile (γ, δ) .

Diese POINCARÉschen Reihen konvergieren im Falle $k \geq 3$ im Gebiet $\Im m \frac{\nu \tau}{\sqrt{d}} > 0$ absolut und sind ganze Spitzenformen.

Die FOURIER-Reihe von $G_\mu(\tau; d, \omega, -k)$ schreiben wir in der Form

$$G_\mu(\tau; d, \omega, -k) = \sum_\nu a_\mu(\nu; d, \omega, -k) e\left(\frac{\nu \tau}{\sqrt{d}}\right).$$

Um die FOURIER-Koeffizienten zu berechnen, spalten wir in (1) die Glieder mit $\gamma=0$ ab. Durch geeignetes Umordnen erhält man hierbei

$$(2) \quad G_\mu(\tau; d, \omega, -k) = \sum_\lambda e\left(\frac{\mu \lambda^2 \tau}{\sqrt{d}}\right) + \sum_{\gamma'} \sum_{\delta} \sum_{\lambda} N(\gamma \tau + \delta)^{-k} e\left(\frac{\mu \lambda^2 M \tau}{\sqrt{d}}\right).$$

Die Summation über γ erstreckt sich über ein System nicht-assoziierter $\gamma \in \mathfrak{R}_\omega$; bei festem γ ist über alle hierzu teilerfremden $\delta \in \mathfrak{R}$ zu summieren. Man erkennt sofort, daß der erste Term in (2) den Beitrag

$$\delta_{\mu\nu}^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{\nu}{\mu} \text{ Quadrat einer Einheit} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

liefert. Den Beitrag des zweiten Terms hat GUNDLACH [4] bestimmt. Nach längerer Rechnung erhält man

$$a'_\mu(\nu; d, \omega, -k) = \frac{4\pi^2}{|\sqrt{d}|} N\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\gamma'} \sum_{\lambda} \frac{W(\nu, \lambda^2 \mu; \gamma)}{N(\gamma)} N J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda|}{\gamma}\right).$$

Hierbei ist $J_{k-1}(x)$ die BESSEL-Funktion erster Art von der Ordnung $k-1$. $W(\alpha, \beta; \gamma)$ ist eine KLOOSTERMANSche Summe:

$$W(\alpha, \beta; \gamma) = \sum_j e\left(\frac{\alpha j + \beta \bar{j}}{\gamma \sqrt{d}}\right).$$

Die Summation erstreckt sich über ein Repräsentantensystem der teilerfremden Restklassen nach dem Modul γ und $\bar{j}$ ist der Sozus von j , d.h. die mod γ eindeutig bestimmte Lösung der Kongruenz $j \bar{j} \equiv 1(\gamma)$. Von den Eigenschaften der KLOOSTERMANSchen Summen wird nur

$$(3) \quad \left| \frac{W(\alpha, \beta; \gamma)}{N(\gamma)} \right| \leq 1$$

benutzt werden. Diese Abschätzung ist für den vorliegenden Zweck besser als die O -Aussage in [4], da dort eine von der Diskriminante abhängige Konstante auftritt, die hier störende.

Ist λ_0 eine Grundeinheit von $\mathfrak{R}$, so ist schließlich

$$(4) \quad a'_\mu(\nu; d, \omega, -k) = \frac{4\pi^2}{|\sqrt{d}|} N\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\gamma'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{W(\nu, \lambda_0^{2m} \mu; \gamma')}{N(\gamma')} N J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{|\sqrt{d}|} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma'}\right).$$

Um (4) abzuschätzen, benötigen wir zwei Abschätzungen der BESSEL-Funktionen:

$$(5) \quad |J_{k-1}(x)| \leq \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \frac{1}{|\sqrt{x}|} \quad \text{für reelle } x \neq 0,$$

$$(6) \quad |J_{k-1}(x)| \leq \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \quad \text{für reelle } x.$$

Durch Eintragen der asymptotischen Entwicklung der BESSEL-Funktionen bestätigt man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} - x \left\{ \left(\frac{1}{x} J_{k-1} + J'_{k-1} \right)^2 + (J'_{k-1})^2 + 2 \left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2} \right) J_{k-1}^2 \right\} = 0.$$

Ferner ist die Ableitung des Ausdrucks unter dem $\lim$ -Zeichen

$$- (4k^2 - 8k + 3) \left(\frac{1}{x} J_{k-1}(x) \right)^2.$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned} (4k^2 - 8k + 3) \int_x^\infty \left(\frac{1}{u} J_{k-1}(u) \right)^2 du &= \\ &= \frac{4}{\pi} - x \left\{ \left(\frac{1}{x} J_{k-1} + J'_{k-1} \right)^2 + (J'_{k-1})^2 + \left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2} \right) J_{k-1}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere für $x \geq |\sqrt{k^2 - 1}|$

$$2x \left(1 - \frac{(k-1)^2}{k^2 - 1} \right) J_{k-1}^2(x) \leq 2x \left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2} \right) J_{k-1}^2(x) < \frac{4}{\pi}.$$

Da die BESSEL-Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \sqrt{k^2 - 1}$ monoton wachsend ist, folgt (5) unmittelbar, wenn man die Relation $J_{k-1}(x) = \pm J_{k-1}(-x)$ beachtet. Die andere Ungleichung folgt unmittelbar aus der Integraldarstellung

$$J_{k-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(k - \frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \sin^{2(k-1)} \varphi d\varphi,$$

indem man $\cos(x \cos \varphi)$ durch 1 abschätzt und das verbleibende Integral ausrechnet.

Schätzt man beide BESSEL-Funktionen nach (6) ab, so erhält man sofort

$$(7) \quad \left| N J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{|\sqrt{d}|} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma'} \right) \right| \leq \frac{1}{((k-1)!)^2} \frac{(2\pi)^{2(k-1)}}{d^{k-1}} \left| \frac{N(\mu \nu)^{\frac{k-1}{2}}}{N(\gamma')^{k-1}} \right|.$$

Verwendet man dagegen einmal (5) und einmal (6), so findet man nach einiger Rechnung

$$\left| N J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma} \right) \right| < \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \times \\ \times \frac{N(\mu \nu)^{-\frac{1}{2}}}{N(\gamma)^{-\frac{1}{2}}} \frac{(\mu' \nu')^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}{|\gamma'|^{k-\frac{1}{2}}} \frac{|\lambda'_0|^m}{|\lambda'_0|^m} \frac{(k-\frac{1}{2})}{|m(k-\frac{1}{2})|}.$$

Da bei diesen Abschätzungen μ und ν beliebige aber feste Zahlen sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die $\gamma \in \mathfrak{R}_\omega$, über welche summiert wird, so ausgewählt sind, daß

$$\lambda_0^{*- \frac{1}{2}} \frac{N(\mu \nu)^{\frac{1}{2}}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|\mu' \nu'|^{\frac{1}{2}}}{|\gamma'|^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{|\mu'' \nu''|^{\frac{1}{2}}}{|\gamma''|^{\frac{1}{2}}} \leq \lambda_0^{* \frac{1}{2}} \frac{N(\mu \nu)^{\frac{1}{2}}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

gilt, wobei $\lambda_0^* = \text{Max}(|\lambda'_0|, |\lambda''_0|)$ gesetzt ist. Damit wird

$$N J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma} \right) \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \frac{N(\mu \nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \lambda_0^{* \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})} |\lambda'_0|^m \frac{(k-\frac{1}{2})}{|m(k-\frac{1}{2})|}.$$

Selbstverständlich gilt analog

$$\left| N J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \frac{N(\mu \nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \lambda_0^{* \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})} |\lambda''_0|^m \frac{(k-\frac{1}{2})}{|m(k-\frac{1}{2})|}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt

$$(8) \quad \left| N J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu \nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0|^m}{\gamma} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \frac{N(\mu \nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}} \lambda_0^{* \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})} (1-2|m|).$$

Es sei m_0 eine von γ abhängige natürliche Zahl. In (4) werden die Summanden mit $|m| < m_0$ nach (7), die übrigen nach (8) abgeschätzt. In beiden Fällen werden die KLOOSTERMANSchen Summen nach (3) abgeschätzt. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$(9) \quad \left| a'_\mu(\nu; d, \omega, -k) \right| \leq \frac{(2\pi)^{2k}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k-1)!^2} N(\nu)^{k-1} \sum_{\gamma} \frac{(2m_0-1)}{|N(\gamma)|^{k-1}} + \\ + 2 \frac{(2\pi)^k}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{1}{1-\lambda_0^{*-(k-\frac{1}{2})}} \frac{|N(\nu)|^{k-1}}{|N(\mu \nu)|^{k-\frac{1}{2}}} \sum_{\gamma} \frac{\lambda_0^{* \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})} (1-2m_0)}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{3}{2})}}.$$

Nun sei $m_0 = \left[\frac{1}{2} \frac{\log |N(\gamma)|}{\log \lambda_0^*} + 1 + \frac{\alpha}{2} \right]$ mit einer festen Zahl $\alpha \geq 0$. Dann ist

$$\frac{\log |N(\gamma)|}{\log \lambda_0^*} - 1 + \alpha < 2m_0 - 1 \leq \frac{\log |N(\gamma)|}{\log \lambda_0^*} + 1 + \alpha$$

und hieraus folgt

$$\lambda_0^{* \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) (1-2m_0)} < \lambda_0^{* - \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\log |N(\gamma)|}{\log \lambda_0^*} - 1 + \alpha \right)} = \frac{\lambda_0^{* \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) (1-\alpha)}}{\left| N(\gamma)^{\frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right)} \right|}.$$

Trägt man diese Abschätzungen in (9) ein, so tritt bei geeigneter Zusammenfassung neben $\sum_{\gamma} \frac{1}{N(\gamma)^{k-1}}$ auch $\sum_{\gamma} \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)^{k-1}}$ auf. Das ist der Wert und (abgesehen vom Vorzeichen) die Ableitung der ζ -Funktion einer Idealklasse von $\mathfrak{K}$ an der Stelle $k-1$. Diese werden durch Wert und Ableitung der ζ -Funktion des Körpers $\mathfrak{K}$ majorisiert. Aus $\zeta_{\mathfrak{K}}(s) = \zeta(s) L_d(s)$ folgt schließlich

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{|N(\gamma)|^{k-1}} \leq \zeta^2(k-1) \leq \zeta^2(2) = \frac{\pi^4}{36}$$

bzw.

$$\sum_{\gamma} \frac{\log |N(\gamma)|}{|N(\gamma)|^{k-1}} \leq 2\zeta(k-1) |\zeta'(k-1)| \leq \frac{\pi^2}{3} |\zeta'(k-1)|.$$

Damit erhält man die für alle Anwendungen allein wichtige Abschätzung:

$$(10) \quad \begin{aligned} |a'_{\mu}(v; d, \omega, -k)| \leq & \frac{1+\alpha}{576} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k-1)!^2} N(v)^{k-1} + \\ & + \frac{1}{12} \frac{(2\pi)^{2k+2}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{|\zeta'(k-1)|}{(k-1)!^2} N(v)^{k-1} \frac{1}{\log \lambda_0^*} + \\ & + \frac{1}{288} \frac{(2\pi)^{k+4}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{N(v)^{k-1}}{N(\mu v)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \frac{\lambda_0^{*\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-\alpha)}}{1-\lambda_0^{*-(k-\frac{1}{2})}}. \end{aligned}$$

Es wird im folgenden eine Abschätzung für λ_0^* benötigt werden. Bei der Ableitung dieser Abschätzung darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß

$$\lambda'_0 > 1 \quad \text{und} \quad |\lambda''_0| < 1$$

gilt. Da λ_0 nicht rational ist, ist $|\lambda'_0 - \lambda''_0| \geq \sqrt{d}$. Hieraus folgt $\lambda'_0 \geq \sqrt{d} - 1$. Dann ist aber $|\lambda'_0| \leq \frac{1}{\sqrt{d}-1}$ und $\lambda'_0 > \frac{1}{\sqrt{d}-1}$. Durch Iteration dieser Schlußweise und durch geschlossene Darstellung des entstehenden Kettenbruches folgt schließlich

$$(11) \quad \lambda_0^* \geq \frac{1}{2}(\sqrt{d} + \sqrt{d-4}).$$

Insbesondere ist also $\lambda_0^* \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Aus der Menge der Anwendungen der Ungleichung (10) greifen wir einige Beispiele heraus:

Satz 1. *Es sei $k > 2$ eine natürliche Zahl und d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers. Von endlich vielen Paaren $d, -k$ abgesehen, gibt es zu jeder der Modulgruppen zu den Idealklassen von $\mathfrak{K} = R(\sqrt{d})$ in jedem der vier Diskontinuitätsgebiete mindestens eine Spitzenform der Dimension $-k$, welche von der Nullform verschieden ist.*

Beweis. In jeder der Klassen $\mathfrak{K}_{\omega}$ gibt es eine ganze Zahl mit vorgegebener Signatur, deren Norm höchstens $2d$ ist; denn nach dem Satz von MINKOWSKI

gibt es in jeder der Klassen $\mathfrak{K}_\omega$ eine ganze Zahl, deren Norm höchstens $\sqrt{d}$ ist, ferner gibt es in $\mathfrak{K}$ zu jeder Signatur eine Zahl deren Norm höchstens $2\sqrt{d}$ und damit kann eine Zahl $\mu \in \mathfrak{K}_\omega$ mit vorgegebener Signatur gefunden werden. Die POINCARÉsche Reihe $G_\mu(\tau; d, \omega, -k)$ ist von der Nullform verschieden, wenn

$$a_\mu(\mu; d, \omega, -k) = 1 + a'_\mu(\mu; d, \omega, -k) \neq 0$$

ist. Das ist sicher der Fall, wenn $|a'_\mu(\mu; d, \omega, -k)| < 1$ ist. Setzt man in (10) $\alpha = 1$ und beachtet man $\lambda_0^* \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, so beweist man diese Ungleichung ohne Schwierigkeit für fast alle Paare $(d, -k)$.

Beschränkt man sich auf die gewöhnliche HILBERTSche Modulgruppe und betrachtet man diese im Gebiet $\Im \frac{\tau}{\sqrt{d}} > 0$, so kann man sich ohne Mühe eine Übersicht über die Ausnahmepaare $(d, -k)$ machen:

Satz 2. Zur gewöhnlichen HILBERTSchen Modulgruppe zum Körper $R(\sqrt{d})$ gibt es stets eine Spitzenform von der Dimension $-k$ mit $k \geq 3$, welche von der Nullform verschieden ist, wenn man von den folgenden Fällen absieht:

$$\begin{aligned} k=3: & \quad d \leq 109, \\ k=4: & \quad d \leq 44, \\ k=5: & \quad d \leq 21, \\ k=6: & \quad d \leq 13, \\ k=7: & \quad d \leq 8, \\ k=8, 9: & \quad d = 5. \end{aligned}$$

Beweis. Die POINCARÉsche Reihe $G_1(\tau; d, 1, -k)$ ist eine von der Nullform verschiedene Spitzenform, wenn man von den genannten Ausnahmefällen absieht. Es sei zunächst $k=3$. Durch numerische Rechnung folgt aus (10)

$$|a'_1(1; d, 1, -3)| \leq \left\{ 4,163(1 + \alpha) + \frac{4,808}{\log_0^* \lambda} \right\} \frac{10^4}{d^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_0^{*\frac{3}{2}}(1-\alpha)}{1 - \lambda_0^{*- \frac{3}{2}}} \frac{1343}{d^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man hier $\alpha = 2,2$ und schätzt λ_0^* nach (11) ab, so folgt $|a'_1(1; d, 1, -3)| < 1$ falls $d \geq 124$. In den Fällen $d=113, 120$ ist (11) nicht ausreichend. Setzt man hier aber den genauen Wert von λ_0^* ein, so folgt wieder $|a'_1(1; d, 1, -3)| < 1$, falls man ein geeignetes α wählt. Die Fälle $k=3, 4, \dots, 9$ sind analog zu behandeln. Im Anschluß daran kann man ohne Schwierigkeit durch vollständige Induktion zeigen, daß für $k \geq 10$ Spitzenformen zu jeder Diskriminante existieren.

Die genauen Rechnungen sollen hier unterdrückt werden. Es soll nur angemerkt werden, daß

$$|\zeta'(2)| < 0,95 \quad \text{bzw.} \quad |\zeta'(k-1)| < \zeta(k-2) - \zeta(k-1) \quad \text{falls } k > 3$$

benutzt wurde. Die erste Abschätzung erhält man durch Summation der ersten Reihenglieder der DIRICHLETSchen Reihe für $\zeta'(s)$ und eine geeignete Restgliedabschätzung.

Um zwei weitere Sätze zu beweisen, setzen wir

$$(12) \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\log \lambda_0^*} \log d \left(\frac{k}{2\pi e} \right)^2$$

in (10) ein. Für fast alle Paare $(d, -k)$ ist $\alpha \geq 0$. Die übrigen Paare $(d, -k)$ seien ausgeschlossen. Ferner werden auch diejenigen (endlich vielen) Paare $(d, -k)$ ausgeschlossen, für die die nachfolgenden Umformungen nicht gelten. Aus (12) folgt

$$\lambda_0^{*\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-\alpha)} = \frac{(2\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \left(\frac{e}{k} \right)^{k-\frac{1}{2}}$$

und damit ist der dritte Term in (10) höchstens

$$\frac{1}{288} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k-1)!^2} N(v)^{k-1}.$$

Nach längerer Rechnung erhält man schließlich

$$(13) \quad |a'_\mu(v; d, \omega, -k)| < \frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{N(v)^{k-1}}{(k-1)!^2} \quad \text{für fast alle Paare } (d, -k).$$

Ferner benutzen wir folgenden bekannten Hilfssatz: Ist $\mathfrak{U}$ die s -reihige Einheitsmatrix und $\mathfrak{U}^*$ eine s -reihige Matrix, deren Elemente alle absolut höchstens $\frac{1}{2s}$ sind, so ist die Determinante der Matrix $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*$ von Null verschieden.

Satz 3. Es sei d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers und $k \geq 3$ eine natürliche Zahl. Sieht man von endlich vielen Paaren $(d, -k)$ ab, so genügt der Rang $r(d, 1, -k)$ der Schar der Spitzenformen zur gewöhnlichen HILBERTSchen Modulgruppe im Gebiet $\Im \tau > 0$ der Ungleichung

$$r(d, 1, -k) \geq \frac{k\sqrt{d}}{2\pi e \cdot \varphi(k)} - 1 \quad \text{mit} \quad \varphi(k) = \frac{2k-1}{9} \sqrt{\frac{2\pi^4 e}{k+1}}.$$

Beweis. Die s POINCARÉschen Reihen

$$G_1(\tau; d, 1, -k), G_2(\tau; d, 1, -k), \dots, G_s(\tau; d, 1, -k)$$

sind sicher linear unabhängig, wenn die s -reihige Determinante

$$\begin{aligned} \Delta_s(d; -k) &= |(a_\mu(v; d, 1, -k))_{\mu, v=1, 2, \dots, s}| \\ &= |(\delta_{\mu v} + a'_\mu(v; d, 1, -k))_{\mu, v=1, 2, \dots, s}| \end{aligned}$$

von Null verschieden ist. Für die hier vorkommenden μ, v gilt nach (13)

$$|a'_\mu(v; d, 1, -k)| < \frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{s^{2(k-1)}}{(k-1)!^2}.$$

Also ist $\Delta_s(d, -k) \neq 0$, falls

$$\frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{s^{2(k-1)}}{(k-1)!^2} \leq \frac{1}{2s}.$$

Da es keine $r(d, 1, -k) + 1$ linear unabhängige POINCARÉsche Reihen gibt, folgt durch Kontraposition

$$(r(d, 1, -k) + 1)^{2k-1} > \frac{72 d^{\frac{1}{2}(2k-1)} (k-1)!^2}{\sqrt{k+1} (2\pi)^{2k+4}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 4. Es sei d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers, k eine natürliche Zahl und $r = r(d, \omega, -k)$ der Rang der Schar der Spitzenformen zur Gruppe Γ_ω von der Dimension $-k$ im Gebiet $\Im \frac{\tau}{\omega \sqrt{d}} > 0$. Dann ist

$$(14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(d, \omega, -k)}{k^2} \geq \frac{R \sqrt{d}}{2\pi^2 e^2} \quad (R = \text{Regulator von } R(\sqrt{d})).$$

Beweis. Man ordne die bezüglich der Gruppe der Einheitenquadrate inäquivalenten ganzen Zahlen aus $\mathfrak{R}_\omega$ mit der durch das Regularitätsgebiet gegebenen Signatur nach wachsender Norm an:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

Dann ist bekanntlich

$$(15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{N(\mu_s)} = \frac{2R}{\sqrt{d}}.$$

Die zum Beweis des vorigen Satzes benutzte Schlußweise wende man nun auf die s POINCARÉschen Reihen

$$G_{\mu_1}(\tau; d, \omega, -k), G_{\mu_2}(\tau; d, \omega, -k), \dots, G_{\mu_s}(\tau; d, \omega, -k)$$

an. Man erhält hierbei

$$(16) \quad \frac{\sqrt{k+1}}{36} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{N(\mu_{r+1})^{k-1}}{(k-1)!^2} \geq \frac{1}{r+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist wegen Satz 3 und Gl. (14)

$$N(\mu_{r+1}) < (r+1) \frac{\sqrt{d}}{2R} (1 + \varepsilon) \quad \text{für } k > k_0(d, \varepsilon).$$

Trägt man dies in (15) ein, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Bisher wurden nur die POINCARÉschen Reihen zu einer einzigen Spitze betrachtet. Erweitert man die Betrachtungen auch auf die übrigen Spitzen, so erhält man an Stelle von (14) die Abschätzung

$$(14a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(d, \omega, -k)}{k^2} \geq h_0 \frac{R \sqrt{d}}{2\pi^2 e^2}.$$

Hierbei ist h_0 die Anzahl aller der Idealklassen, die ein Idealquadrat enthalten. Auf den Beweis dieser Verschärfung soll nicht näher eingegangen werden.

Satz 2 kann ebenfalls ergänzt werden. Man hat nämlich die Möglichkeit, Spitzenformen durch Polynome in EISENSTEINSchen Reihen zu konstruieren, so wie $\Delta(\tau)$ eine Linearkombination von $G_4^3(\tau)$ und $G_6^2(\tau)$ ist. Damit kann die Existenz von nicht-identisch verschwindenden Spitzenformen der Dimension $-k$ für jedes gerade $k \geq 4$ zu den in Satz 2 genannten Gruppen bewiesen werden.

Literatur

[1] MAASS, H.: Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Ann. **117**, 538—578 (1940). — [2] GUNDLACH, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourier-Koeffizienten. Acta math. **92**, 309—345 (1954). — [3] HERRMANN, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [4] GUNDLACH, K.-B.: Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe. Math. Z. **64**, 339—352 (1956). — [5] HERVÉ, M.: Sur les fonctions fuchsienues de deux variables complexes dans un bicercle. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 41—43 (1952).

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Oktober 1955)

Technische Elektrodynamik

Von Dr.-Ing., Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Member I.E.E., Member A.I.E.E., Senior Member I.R.E., Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Band II: Innere Elektronik.

Teil I: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten
Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 97.—

Hauptabschnitte: Langsame Bewegung des Elektrons im elektrischen Felde. — Langsame Bewegung des Elektrons im elektromagnetischen Felde. — Allgemeine klassische Mechanik des Einzelelektrons. — Die elektronenoptischen Systeme der *Gaußschen* Dioptrik. — Einführung in die Theorie der elektronenoptischen Aberration. — Die Grundlagen der relativistischen Elektronik. — Literaturhinweise. — Namen- und Sachverzeichnis.

Die Probleme der Erzeugung elektrischer Elementarteilchen, ihrer Bewegung unter dem Zwange elektrodynamischer Kräfte und die hierbei stattfindenden Energieumwandlungen bilden das Arbeitsgebiet der „Inneren Elektronik“, deren theoretische Grundlagen in diesem Band dargestellt werden. Der erste Teil beschäftigt sich mit dem als vorgegeben geltenden Einzelelektron in eingepägten Feldern. Ausgehend von der Analyse der Elektronenbahnen werden die Anwendung in Kathodenstrahlröhren, im Massenspektrographen, im Magnetron und Zyklotron behandelt und in weiterer Folge die Probleme der kosmischen Elektronenstrahlen und die Prinzipie der Elektronenoptik. Das letzte Kapitel des ersten Teiles vermittelt schließlich einen Einblick in die Elektronik der höchsten Geschwindigkeiten (relativistische Elektronik) und weist damit den Weg zum Verständnis für den Bau und Betrieb der modernen Ionenschleudern, welche in der eben beginnenden Technologie der Atomkerne eine so wichtige Rolle einnehmen.

1952 erschien:

Band I: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten
Gr.-8°. 1952. Ganzleinen DM 66.—

In Vorbereitung:

Band II: Teil 2: **Elektronik von Ionenkollektiven.**

Weitere Bände folgen. — Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich. In weiterer Folge werden behandelt werden: Die Elektrodynamik ruhender Körper (Ausbreitung elektromagnetischer Wellen), die Elektrodynamik quasistationärer Felder (Elektrische Maschinen und Wirbelströme samt allen technischen Anwendungen), die Elektrostatik, die Erscheinungen der elektrischen Festigkeit, die Elektrotechnik der Kristalle, die technische Elektrochemie einschließlich elektrophysiologischer Fragen.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Die Mechanisierung des Weltbildes

Von Dr. E. J. Dijksterhuis, a.o. Professor für Wissenschaftsgeschichte an den Universitäten zu Leiden und Utrecht, Bilthoven/Holland. Ins Deutsche übertragen von Helga Habicht, Heidelberg. Mit 47 Abbildungen. VII, 594 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 36.—

Unter den vielen Veränderungen, die das wissenschaftliche Denken über die Natur im Laufe der Jahrhunderte erfahren hat, läßt sich kaum eine aufweisen, deren Wirkung in die Tiefe so stark und in die Breite so mannigfaltig war wie die Entstehung und Entwicklung der Betrachtungsweise, die man die mechanische, die mechanistische oder die mechanizistische zu nennen pflegt.

Erstens hat sie zu den Untersuchungs- und Behandlungsmethoden geführt, welche die Physik — und darunter verstehen wir in Abweichung vom üblichen Sprachgebrauch die gesamte Wissenschaft der leblosen Natur, also außer Physik im engeren Sinne auch Chemie und Astronomie — später zu jener Hochblüte gebracht hat, deren Früchte wir heute ernten; es sind dies das Experiment als Erkenntnisquelle, die mathematische Formulierung als Beschreibungsmittel, die mathematische Deduktion als Wegweiser zu neuen, durch Experimente kontrollierbaren Erscheinungen. Zweitens waren es ihre Erfolge, welche die Entwicklung der Technik ermöglichten und welche dadurch die weitgehende Industrialisierung auslösten, die längst zu einer Existenzgrundlage der Menschheit geworden ist. Und schließlich fanden ihre Ideen Eingang in das philosophische Denken über den Menschen und seinen Platz in der Welt und in eine Reihe von Fachwissenschaften, die anfänglich außerhalb jedes Kontaktes mit dem Studium der Natur zu stehen schienen. Durch das alles ist die Mechanisierung der Physik viel mehr als eine interne methodische Angelegenheit der Naturwissenschaft geworden; sie geht die Kulturgeschichte als Ganzes an und verdient daher auch außerhalb des Kreises der Naturforscher Aufmerksamkeit.

Daß die Einführung der mechanistischen Betrachtungsweise so einschneidende und weitreichende Folgen für die menschliche Gesellschaft hatte, ist eine historische Tatsache, die zu sehr verschiedenen Werturteilen Anlaß gab.

Diese Meinungsverschiedenheit wird im folgenden nicht berücksichtigt, sondern es wird ausschließlich untersucht, wie die mechanistische Naturwissenschaft zustande gekommen ist.

Die eingeführte Unterscheidung antik—klassisch—modern, wobei also klassisch ausdrücklich nicht in dem Sinne gebraucht wird, der gemeint ist, wenn vom klassischen Altertum gesprochen wird, sondern in dem Sinn, in dem die modernen Physiker das Wort zu gebrauchen pflegen, gilt nicht nur für die Mechanik, sondern auch, unter ihrem Einfluß, für die gesamte Physik. Sie führt hier zu einer Einteilung der historischen Entwicklung in drei Perioden, die, obwohl sich diese Entwicklung nur allmählich vollzogen hat, jeweils durch ein ganz bestimmtes Anfangsjahr gekennzeichnet sind; die antike Physik fängt mit Thales von Milet (ca. 600 v. Chr.) an, die klassische mit dem Erscheinen von Newtons Principia im Jahre 1687, die moderne im Jahre 1900 an dem Tag, an dem Max Planck den Quantenbegriff einführte.

Die Mechanisierung, die das Weltbild beim Übergange von antiker zu klassischer Naturwissenschaft erfahren hat, besteht in der Einführung einer Naturbeschreibung mittels der mathematischen Begriffe der klassischen Mechanik; sie bedeutet den Beginn der Mathematisierung der Naturwissenschaft, die in der Physik des zwanzigsten Jahrhunderts ihre Vervollendung findet.

Dieses Werk ist kein Handbuch für Wissenschaftshistoriker, sondern es wird an einen Leser mit allgemeinem Interesse gedacht, bei dem keinerlei mathematische oder physikalische Schulung vorausgesetzt wird. Ein solcher wird mehr Nutzen von einer Übersicht haben, welche die großen Züge festhält, als von einer Behandlung, die auf alle Details eingeht. Daher wird der Anteil, den die griechische Kultur am Zustandekommen der Naturforschung gehabt hat, nur in der perspektivischen Verkürzung der Vergangenheit behandelt. Der Verfasser verfolgt das griechische Denken nicht in seiner eigenen historischen Entwicklung, sondern fragt nach dem geistigen Erbgut, das Hellas Europa hinterließ, und nach der Richtung, die es dem europäischen Denken wies.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN GÖTTINGEN · HEIDELBERG